



GNSS-punktobservasjoner for etablering av fastmerker

En undersøkelse basert på simulering

STATENS VEGVESENS RAPPORTER

Nr. 696



Tittel**Title****Undertittel****Subtitle****Forfatter**

Trond Arve Haakonsen

Author**Avdeling**

Transportutvikling

Department

Transport Development

Seksjon

Transportdata

Section

Transport Data

Prosjektnummer**Project number****Rapportnummer**

Nr. 696

Report number

No. 696

Prosjektleder**Project manager****Godkjent av****Approved by****Emneord**

fastmerker, fastmerkenett, bygg- og anleggsnett, punktmålinger, sanntids-GNSS, RTK, simulering

Key words**Sammendrag**

Etter at Statens kartverk i 2019 justerte koordinater på stamnett- og landsnettpunkter for bedre samsvar med posisjonstjenester vil det være mulig å bruke en enklere metode, punktmålinger med sanntids-GNSS (RTK) ved etablering av fastmerker. Ved hjelp av simulering er det undersøkt om toleransekrav kan tilfredsstilles med den nye metoden.

Summary

Simulering av fastmerkenett med punktobservasjoner og totalstasjon

Innhold

Introduksjon.....	2
Artikkelens hensikt.....	2
Målefeil, nøyaktighet og presisjon.....	4
Metode.....	6
Formler.....	6
Antatt målenøyaktighet (vektning).....	7
Punktmåling med sanntids-GNSS.....	7
Totalstasjon.....	7
Vektforhold mellom totalstasjons- og punktobservasjoner.	8
Nettverksanalyse	9
Observasjonstest.....	9
Grunnlagstest.....	10
Indre pålitelighet.....	10
Ytre pålitelighet.....	11
Simulering	13
Fiktive punktobservasjoner.....	13
Fiktive observasjoner med totalstasjon.....	14
Resultater.....	14
1) 70km mellom PGS (kun punktobservasjoner)	15
2) 35km mellom PGS (5 punktobs + polygondrag)	17
3) 70km mellom PGS (5 punktobs + polygondrag)	19
4) 70km mellom PGS (5 punktobs + 2 polygondrag).....	21
Konklusjoner	23
Referanser.....	26

Introduksjon

Standarden (Geodatakvalitet 2015) definerer absolutt stedfestingsnøyaktighet som nøyaktighet i forhold til en definert geodetisk referanseramme. GNSS har sin styrke i god absolutt stedfestingsnøyaktighet, mens en totalstasjon gir målinger med svært god presisjon. Med riktig vektning utfyller GNSS og totalstasjon hverandre på en ypperlig måte. De norske standardene for fastmerkenett: *NS3580 Bygg- og anleggsnett - Ansvarsfordeling, kvalitetskrav og metoder* (NS3580 2015) og *Grunnlagsnett Kartverket (2009)* har fokus på nabonøyaktighet. For fastmerker som skal benyttes i byggefase er det definert strenge toleransekrav til ytre pålitelighet for naboforbindelser. Bygg- og anleggsnettets tilknytning til det geodetiske grunnlaget sikres ved å benytte stam- og landsnettpunkter som grunnlagspunkter ved utjevning etter Minste Kvadraters Metode (MKM).

Kartverket justerte i 2019 koordinater på stamnett- og landsnettpunkter for optimalt samsvar med koordinater målt med posisjonstjenester. Dette gjør det aktuelt å benytte punktmålinger med sanntids-GNSS (RTK) som observasjoner i bygg- og anleggsnett.

I vegprosjekter kan det være praktisk å skille mellom krav til fastmerker i ulike faser, for eksempel 1) prosjekteringsfase, og 2) byggefase, etter at vegtraséen er ryddet for vegetasjon. Datafangst der formålet er konstruksjon av digital terrengmodell eller innmåling for prosjektering kan gjøres før vegtraséen er ryddet. I denne fasen er god global absolutt stedfestingsnøyaktighet mest viktig. Dagens gode referansenettverk av permanente GNSS-stasjoner (PGS) gir god nøyaktighet ved gjentagende punktmåling med sanntids-GNSS. Det kan derfor være tilfredsstillende å kun sette toleransekrav for ytre pålitelighet - punktdeformasjon for bruk i prosjekteringsfasen. Punktene bør etableres med tanke på at de også skal kunne benyttes i byggefase. Det krever sikt mellom-, og maksimal avstand 4-500m mellom nabopunkter. Utjevnede koordinater for flere punktmålinger separert i tid kan betraktes som foreløpige koordinater som benyttes inntil traséen er ryddet.

I praksis er det vanskelig å plassere punktene fra planfasen optimalt i forhold til ønsket plassering for byggefase, slik at ofte må supplere eller opprette helt nye punkter for byggefase. Etter at vegetasjonen er ryddet, men før byggestart, kan punktmålte fastmerker knyttes sammen med supplerende totalstasjonsmålinger. Etter ny pålitelighetsanalyse og utjevning får en endelige koordinater for fastmerkene for bruk i byggefase.

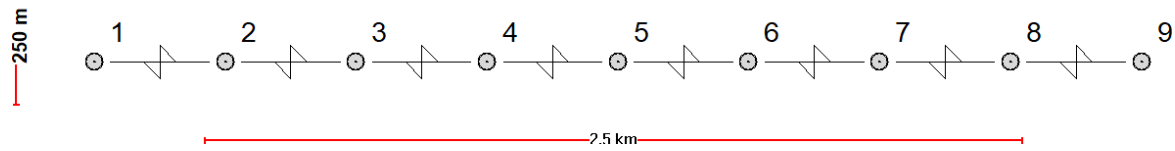
Toleransekravene til ytre pålitelighet i NS3580 med fokus på nabonøyaktighet skal fortsatt være gjeldende, og benyttes for å sikre nøyaktig stikning og innmåling i byggefase.

Norske standarder for fastmerkenett definerer kun toleranser for ytre pålitelighet ved beregning i kartplanet (N,E,H). Toleransekrav for punktmåling er foreløpig ikke definert i de to standardene. Om toleranser for punktobservasjoner defineres i 3D vil de kunne benyttes ved flere koordinatformer, f.eks. også ved bruk av jordsentriske (X,Y,Z)-koordinater. Det vil også åpne mulighetene for bruk av andre enn de norske programvarene spesialutviklet etter norske standarder.

Artikkelens hensikt

Kvaliteten på fastmerker i et bygg- og anleggsnett for vegprosjekt, målt med punktobservasjoner fra sanntids-GNSS og totalstasjons-observasjoner, skal undersøkes ved simulering og nettverksanalyse. Ved vegbygging benyttes ofte langstrakte nett. Det fiktive

nett i Figur 1 er derfor konstruert med 9 punkter på en rett linje og 400 meter mellom punktene. Det antas at søyler med skrubolt skal etableres i hvert punkt slik at alle sentreringsnøyaktigheter kan settes tilnærmet lik null. I hvert punkt måles 4-5 uavhengige GNSS-punktobservasjoner. I tillegg måles minst fire helsatser med totalstasjon, gjensidig i hvert punkt, tilsvarende et tradisjonelt polygondrag.



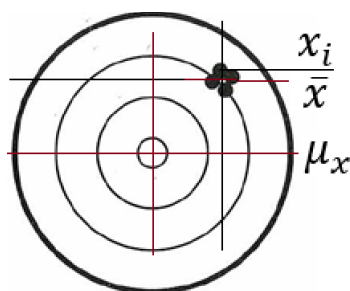
Figur 1, Typisk geometri for et nett av fastmerker på et langstrakt vegprosjekt. Avstand mellom punktene er 400m.

Det primære målet med artikkelen er å undersøke *ytre pålitelighet*, og oppnåelig nøyaktighet for fastmerkenett av samme type som vist i figur 1. Ytre pålitelighet for punktmåling i fastmerkenett undersøkes spesielt, som bidrag i arbeidet med å definere toleranser for punktmåling i framtidige standarder.

Målefeil, nøyaktighet og presisjon

Det er vanlig å dele målefeil inn i tre kategorier. 1) *grove feil* (tabber) 2) *systematiske feil* (regelmessige feil) og 3) *tilfeldige feil* (små avvik som skyldes naturlig målevariasjon). En forutsetning for utjevning av fastmerkenett etter MKM, er at både *grove*- og *systematiske feil* er utsortert, og at det kun finnes *tilfeldige feil* igjen i observasjonsmaterialet. Ved gjentagende måling av fysiske størrelser, f.eks. avstander, vinkler, høydeforskjeller erfarer en at målingene vil avvike noe fra hverandre. Målinger, også kalt observasjoner vil aldri, eller svært sjelden være de samme som størrelsens *sanne verdi*, eller *forventningsverdien* μ . Forskjellen mellom en måling og forventningsverdien kalles sann feil. Om x_i er måling nummer i , er den tilhørende sanne feil: $\varepsilon_i = x_i - \mu$.

I geodesi skiller en tydelig mellom nøyaktighet og presisjon. Begrepet (absolutt) nøyaktighet brukes om hvor nær en måling er dens «sanne verdi». Presisjon er et uttrykk for spredning. I 2D illustreres forskjellen ofte med skudd på en blink. De fire skuddene i Figur 2 er godt samlet. Det gir god presisjon i betydningen liten spredning. Men, middelveiden \bar{x} av de fire skuddene ligger langt fra blinkens sentrum, så nøyaktigheten er lav. Årsaken kan være en systematisk feil i siktet.



Figur 2 Nøyaktighet og presisjon

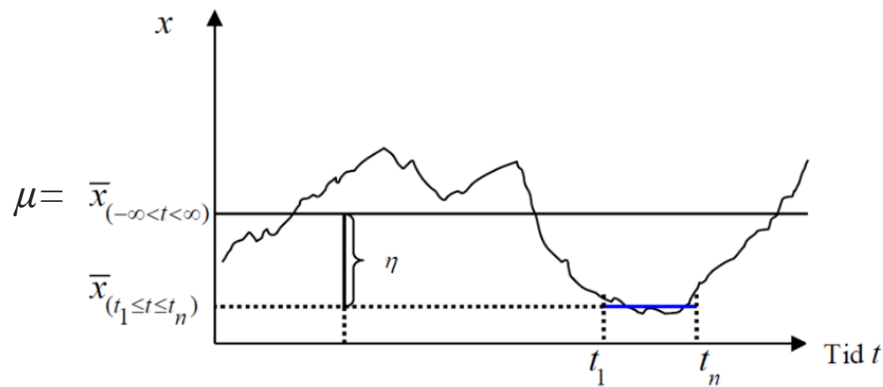
Anta en tilsvarende situasjon som i Figur 2 for fire punktmålinger med samme vekt med sanntids-GNSS. La f.eks. x_i være nord-kordinaten for enkeltmåling nummer i . Det beste estimatet vi kan beregne for punktets nord-kordinat er gjennomsnittet av de fire målingene: \bar{x} . Standardavviket, formel (6) i metodekapittelet beregnes fra summen av kvadrerte avvik: $(x_i - \bar{x})$ og er et mål på presisjon eller spredning omkring middelveiden. Om punktets «sanne» nord-kordinat, μ_x var kjent, ville vi kunne estimert nøyaktigheten mer realistisk med RMS-verdien basert på spredningen om μ_x , formel (8).

Tilsvarende betraktninger kan gjøres for y-retningen

Leverandørers oppgitte utstyrspresisjon er ofte optimistiske verdier, oppnådd ved måling under ideelle forhold i et laboratorium. Utendørsmålinger kan påvirkes av varierende værforhold (trykk, temperatur, vind, refraksjon) eller et stativ som sigrer. Slike effekter fanges ikke opp ved testing innendørs i laboratorium.

Et annen betraktning på forskjell mellom presisjon og nøyaktighet kan gjøres ved 1D-høydemåling med sanntids-GNSS. En rasjonell landmåler ønsker med en kortest mulig sekvens målinger, å bestemme middelveiden til høyden i et punkt og dennes nøyaktighet. I Figur 3 er x_1, x_2, \dots til x_n målte høyder, i et og samme punkt, over tidsintervallet fra t_1 til t_n . Om en gir alle målingene samme vekt vil utjevnet høyde for punktet bli middelveiden \bar{x} , formel (5) som er et estimat for den sanne verdien μ , formel (1). Om samtlige enkeltmålinger (eller

riktigere, målingenes *sanne feil*) antas uavhengige av hverandre kan en bruke formlene (6) og (7) for å finne standardavviket til en enkeltmåling, og standardavviket til middelveiden av alle n målinger. Målinger over tid (tidsserier eller dataserier) med korte tidsepoker kan sjelden antas uavhengige av hverandre. De er *korrelerte* (Latin: *ko* = med eller samme), altså *samrelaterte* i tid. Et eksempel på en tidsserie fra høydekomponenten til en sanntids-GNSS-prosess er vist i Figur 3.



Figur 3: Eksempel på en tidsserie fra høydekomponenten til en sanntids-GNSS-prosess

Både vær-, atmosfæriske forhold og satellittenes konstellasjoner er ganske like over en kort måleperiode. Om en ønsker å gjette verdien på neste målte høydeverdi i serien, vil det sannsynligvis lønne seg å tippe samme verdi som ved foregående måling, fordi de er korrelerte over tid. Om de målte dataene var uavhengige, ville en ikke hatt noen hjelp av historien. Formel (6) inneholder summen av kvadratiske avvik/forskjeller mellom hver enkeltmåling og middelveiden. I tilfeller med tidskorrelasjon vil beregnet standardavvik for et kort tidsintervall fra t_1 til t_n , bli mer optimistisk enn om en brukte avvik fra den *sanne verdien* μ . Men, den sanne verdien kan en jo ikke finne. Da måtte en målt $n \rightarrow \infty$ observasjoner som vil ta «hele punktets levetid». Over et kort intervall kan en si at standardavvikformelen gir et svar på *presisjonen* (nabonøyaktigheten i tid) men for å få vite noe om hvor nær vi er den sanne verdien, dvs. *absolutt nøyaktighet*, bør det måles en lengre tidsperiode. Å måle i all framtid er ikke mulig, men ved å måle i lengre perioder eller spre enkeltobservasjoner ut i tid vil en få med en større variasjon, og de beregnede standardavvik blir mer realistiske. Basert på erfaring er det vanlig å skalere opp vektorens «sigma null» fra «statisk» målte GNSS-vektorer (1-4 timer) med en erfaringsmessig valgt faktor.

En annen betraktning er at f.eks. metrologiske forhold har introduserer en systematisk feil η , lik forskjellen mellom forventningsverdien og den målte seriens gjennomsnitt. Om det var mulig å korrigere for η , vil en både kunne forbedre måleresultatene, og også deres nøyaktighetsestimat. Tidskorrelasjon oppleves både ved vinkelmåling og elektronisk avstandsmåling. Svært like metrologiske forhold gjør at en ofte får samme måleverdi, på millimeteren, når en måler to avstander umiddelbart etter hverandre. En tenker at avstandsmåleren er *nøyaktig*, men det vil være mer riktig å si at den er *presis*. Ved trianguleringer i gamle dager krevdes minst en time ventetid mellom hver enkelt målte sats av vertikalvinkler. Lykkes en med å fjerne alle systematiske feil i et datasett, vil presisjon og nøyaktighet bli det samme. I signalanalyse benyttes uttrykket *hvit støy* om tilfeldige feil i en statistisk prosess uten korrelasjon. Med tilfeldig menes, ikke forutsigbart.

Metode

Formler

Om x_i er observert verdi nummer i , av en stokastisk variabel x , er *den sanne verdien* eller *forventningsverdien* til x : μ :

Gjennomsnittet av alle n observasjoner, i et teoretisk tenkt tilfelle når n går mot uendelig.

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n \rightarrow \infty} x_i \quad (1)$$

Den teoretiske variansen til x er:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n \rightarrow \infty} (x_i - \mu)^2 / n = \sum_{i=1}^{n \rightarrow \infty} v_i^2 / n = \sum_{i=1}^{n \rightarrow \infty} \varepsilon_i^2 / n \quad \text{der «sanne feil»: } \varepsilon_i = -v_i \quad (v_i = \text{korreksjon}) \quad (2)$$

$$\sigma = +\sqrt{\sigma^2} \quad \text{Teoretisk standardavvik er den positive roten av variansen} \quad (3)$$

Forholdet mellom standardavvik og vekter p_i er gitt ved, Skogseth and Norberg (2014):

$$\sigma_1^2 p_1 = \sigma_2^2 p_2 = \dots = \sigma_n^2 p_n = \sigma_0^2 \cdot 1 = \text{konstant} \quad (4)$$

σ_0 er standardavviket på vektenheten (til den observasjonen som er gitt vekt $p_0 = 1$).

For å beregne tallverdier benyttes bruksformler basert på n stk. målinger

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{er gjennomsnittet, en formel for å estimere (sannsynlighetsberegne) } \mu \quad (5)$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{er estimert standardavvik for en enkelt måling} \quad (6)$$

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} \quad \text{er standardavviket for et gjennomsnitt av } n \text{ uavhengige enkeltmålinger} \quad (7)$$

I spesielle tilfeller der en kan anta å kjenne de sanne feil, blir RMS (Root mean squared):

$$RMS = \sqrt{\sum_{i=1}^{n \rightarrow \infty} \varepsilon_i^2 / n} = \sqrt{\eta^2 + S^2} \quad \text{der } \eta \text{ er en eventuell systematisk feil } \eta = (\bar{x} - \mu) \quad (8)$$

$$RMS_{3D} = \sqrt{RMS_N + RMS_E + RMS_H} \quad (9)$$

Antatt målenøyaktighet (vekting)

Punktmåling med sanntids-GNSS

Figur 4 er hentet fra Kartverket (2018) og viser forventet nøyaktighet for punktmåling med sanntids-GNSS (RTK) med korreksjoner fra CPOS. Oppnåelig kvalitet for punktmåling er avhengig av tetthet mellom PGS. Den oppgitte CPOS-nøyaktigheten bør anses som *absolutt stedfestingsnøyaktighet*, uavhengig av hvor i landet en måler. Med *forventet oppnåelig nøyaktighet* i tabellen menes trolig en «best case» situasjon med rolige værforhold, liten ionosfæreaktivitet, god mobildatadekning, ingen sikthindringer til satellitter osv.

Grunnrissnøyaktigheten antas å være for x - og y -retning (8 eller 14mm), altså et ID -mål, slik som høydenøyaktigheten er oppgitt. Tabellen er basert på bruk av de to satellittkonstellasjonene GPS og GLONASS. Kvaliteten på sanntids-GNSS-måling med korreksjonsdata fra andre norske leverandører antas å ha tilsvarende nøyaktighet, avhengig av avstanden mellom PGS.

Kvalitet

Innenfor tjenestens dekningsområde er forventet oppnåelig nøyaktighet følgende:

	I områder med ca. 35 km mellom SATREF PGS	I områder med ca. 70 km mellom SATREF PGS
Grunnriss EUREF 89	8 mm	14 mm
Høyde EUREF89 (over ellipsoiden)	17 mm	30 mm
Høyde NN2000	20 mm	36 mm

Resultatene er basert på Kartverkets analyser av målinger utført med CPOS. Tallene i tabellen ovenfor er oppgitt for 66% av tilfellene (standardavvik 1 sigma). For å få verdiene for 95% av tilfellene (2 sigma), må du multiplisere med 2.

Figur 4, Forventet nøyaktighet for punktmåling med sanntids-GNSS ved bruk av to satellittkonstellasjoner, GPS og GLONASS.

PGS'er som benyttes av norske leverandører av posisjonstjenester i sanntid, representerer homogene nettverk i en moderne global referanseramme. For å relatere målinger til norske kart får brukerne koordinater transformert til en homogen regional referanseramme som ligner best mulig på EUREF1989. Endring av PGS-koordinater skal normalt ikke føre til endring for brukerne. Det kan være et definisjonsspørsmål om norske RTK-nettverk representerer en regional eller en global referanseramme.

Totalstasjon

En totalstasjon som benyttes til fastmerkemåling har typisk presisjon: $\sigma = 1\text{mm} + 1\text{mm per km}$ for målt avstand, og $\sigma = 0,3\text{mgon}$ for vertikal- og horisontal retning for en målt helsats. Forbedring kan normalt oppnås ved å måle, og midle flere uavhengige helsatser. Med prismegjenkjenning og servomotor har satsmåling blitt en automatisert oppgave som gjøres raskt og effektivt. Kort tid mellom målte satser gir signifikant tidskorrelasjon, så en kan ikke uten videre benytte formel (7) for standardavviket til middelveidien. Erfaring tilsier at en kan benytte leverandørens oppgitte presisjon for én vinkelhelsats, som absolutt nøyaktighet for satsmiddelveidier av fire helsatser som et utgangspunkt for vekting.

Vektforhold mellom totalstasjons- og punktobservasjoner.

For å illustrer vektforholdet mellom observasjoner fra totalstasjon og sanntids-GNSS er Tabell 1 utarbeidet med antatte standardavvik i feilforplantningsloven og formel (4).

Punkt- og totalstasjonsobservasjoner er ikke direkte sammenlignbare. Derfor er avstand, vertikalvinkel og horisontalretning avledet fra punktmåling i to nabopunkter med avstand 400m. Matematisk sammenheng for en avstand mellom nabopunktene 1 og 2 i Figur 1 kan f.eks. skrives som $l_{400m} = E_2 - E_1$. Antatt standardavvik for punktmåling i et område med 35km mellom PGS i østretning, er $\sigma_E = 8mm$. Forutsetter en uavhengige punktobservasjoner gir feilforplantningsloven $\sigma_{400m} = \sqrt{2}\sigma_E = 11,3mm$ Velger en vekt $p=1$ for en 400m-avstand avledet fra to punktmålinger med sanntids-GNSS, vil en avstand målt med totalstasjon få vekt $p=65,1$ osv. Tabell 1 illustrerer vektforhold mellom tre observasjonstyper fra totalstasjon- og observasjoner avledet av parvise punktmålinger. Vektforholdet blir omtrent tre ganger så stort i et område med 70km mellom PGS, sammenlignet med et område med 35km mellom PGS. Gjør en flere uavhengige GNSS-målinger i hvert punkt, vil totalstasjonsobservasjoner likevel vektet betydelig tyngre enn sanntids-GNSS.

Tabell 1: illustrerer vektforhold for tre ulike observasjonstyper basert på standardavvik benyttet i simuleringen. Forholdet mellom vekter for avstand- og retningsobservasjoner framgår ikke av tabellen.

	GNSS 35km		Totalstasjon		GNSS 70km		Totalstasjon	
	σ	p	σ	P	σ	P	σ	p
Avstand 400m	11,3mm	1	1,4mm	65,1	19,8mm	1	1,4mm	200
Horisontalretning	0,0016g	1	0,0003g	29,1	0,0028g	1	0,0003g	89,4
Vertikalvinkel	0,0035g	1	0,0003g	131,8	0,0061g	1	0,0003g	410,4

Forventet høydenøyaktighet

Om en ser for seg et observasjonsrisset i et godt overbestemt fastmerkenett målt med en god totalstasjon, vil små utjevningsskorreksjoner på noen få millimeter opptre som små avvik i sammenføyningene. Noen av knutepunktene skal henges på knagger med «fixed» koordinater gitt i et globalt referansesystem. For at ikke opphengene skal deformere det relativt stive totalstasjonsnettet, tenker en seg bruk av strikker i de valgte knutepunktene. I utjevningsteori kalles denne teknikken «løse føringer». Relativt store standardavvik for punktobservasjoner gir lave vekter (eller slakke strikker) sammenlignet med det stive nettet «sammenbundet» med totalstasjon.

Tabell 1 illustrerer vektforholdet mellom et sett punktobservasjoner som «løse knagger» i referanserammen, og fasterkenettet sammenbundet sammen av presise totalstasjonsmålinger. For et overbestemt fastmerkenett som vist i Figur 1 i, vil nettes absolutte nøyaktighet bestemmes av punktmålingenes antall og nøyaktighet. Med fem uavhengige punktmålinger i hver av de ni punktene, bør en med formel (7) kunne skalere standardavvik fra Figur 4 for et punkt i det sammenbundne nettet med faktoren $1/\sqrt{45}$. Med CPOS-nøyaktighet som angitt i Figur 4 gir dette høydestandardavvik i et utjevnet punkt på henholdsvis 3mm og 5mm, i områder med 35km og 70 km mellom PGS for et fiktivt nett som vist i figur 1.

Nettverksanalyse

En fastmerkenettsanalyse består av: 1) observasjonstest, 2) grunnlagstest, 3) indre pålitelighet, 4) ytre pålitelighet og 5) utjevning. Ønsker en å gå i dypet i analyse av fastmerkenett kommer en ikke utenom matriseregning fra matematikken. Anbefalt litteratur om nettutjevning er Gjevestad (2018), (Ghilani 2010), (Leick 2004), (Anderson, Mikhail et al. 1998) og (Koch 2010). Den «norske metoden» er å regne om GNSS-observasjoner slik at analysen kan utføres med observasjoner fra totalstasjon og/eller nivellement i kartplanet.

Observasjonstest

Grove feil kan gjøre stor skade i en utjevning. En observasjonstests primære mål er å finne, og utelukke slike. En vanlig metode baserer seg på kunnskapen om tilfeldige målefeils fordeling. Benyttes ulike vektter er σ_i observasjon i 's på forhånd antatte standardavvik.

Teststørrelsen *normalisert utjevningsskorreksjon* v_i / σ_i er *standard normalfordelt*. En øvre grense for absoluttverdien: $|v_i / \sigma_i|$ benyttes som kriterium for vraking av observasjoner.

Observasjonstesting basert på standard normalfordeling kalles også *datasnooping* og er beskrevet av Baarda (1968) og (Andersen 1983).

Finnes en grov feil i en observasjon vil estimatene \hat{v}_i og $\hat{\sigma}_i$ bli beheftet med denne. Derfor beregnes isteden \hat{v}_i^* og $\hat{\sigma}_i^*$ fra alle målinger, men med unntak av den ene observasjonen som kan tenkes å inneholde en grov feil (Johnson and Wichern 2002). I statistikken kalles \hat{v}_i^* for et *delete-one residual*. Stjernen symboliserer at tallverdien for observasjon l_i ikke inngår i beregningen. Ved å studere «delete-one» residualaet $\hat{v}_i^* = \hat{l}_i^* - l_i$ er det lettere å avsløre om det finnes en grov feil i observasjonen l_i . Skal det være mulig å beregne \hat{v}_i^* må nettet planlegges med tanke på kontrollerbarhet, det vil si en tallverdi for \hat{l}_i^* må kunne beregnes fra nettets øvrige observasjoner.

Multipel T-test

Den foretrukne løsningen i norske standarder og programvare, er å estimere en mulig grov feil \hat{V}_i . (Gresk *nabla*) og denne grovfeilens standardavvik $\hat{\sigma}_{V_i}$ for hver enkelt observasjon, se Gjevestad (2018). Absoluttverdien av beregnet verdi: $t = \hat{V}_i / \hat{\sigma}_{V_i}$ fra målingene, vurderes mot en grenseverdi hentet fra en *student T*-fordeling. Med mange observasjoner er en T-fordeling

tilnærmet lik en standard normalfordeling. Med statistikknotasjon: $t = \frac{\hat{V}_i}{\hat{\sigma}_{V_i}} \sim T_{(n-e-1, \alpha/2)}$

Testobservatoren t , er *T-fordelt* med $(n-e-1)$ frihetsgrader (redundans) med signifikansnivå $\frac{\alpha}{2}$

Det er vanlig å sette testens totale signifikansnivå til $\alpha_{tot} = 5\%$. Antar en uavhengige observasjoner beregnes *individuell signifikansnivå* for test av hver enkelt observasjon med $\alpha_{ind} = 1 - (1 - \alpha_{tot})^{1/n}$. α_{ind} blir kunstig lav ved et stort antall observasjoner. (GISLINE 2019) anbefaler å sette nedre grensen til $\alpha_{ind} = 0,001$ (når antallet observasjoner overstiger 50).

Under nullhypotesen antas at testobservatoren er T -fordelt med redundans $(n-e-1)$ på valgt individuelt signifikansnivå α_i . n er antall observasjoner, e er antall ukjente parametere. t -verdien kan både være positiv og negativ, så dette er en to-halet test der k velges fra tabell når $\alpha_{ind}/2$. Trinnvis ser multippel T -test slik ut:

- 1) $H_0 : \nabla_i = 0$ Nullhypotese: Ingen grovfeil i observasjon i
 $H_A : \nabla_i \neq 0$ Alternativ hypotese: Minst en signifikant grov feil i data.
- 2) Anta $t = \frac{\hat{\nabla}_i}{\hat{\sigma}_{\nabla_i}} \sim T_{(n-e-1, \alpha_{ind}/2)}$ dvs. t er T -fordelt med redundans $n-e-1$.
 Dette gjelder under H_0 . Det kreves altså ikke at t er T -fordelt om H_0 forkastes.
- 3) For hver enkelt observasjon i , beregnes for alle n observasjoner: $t_i = |\hat{\nabla}_i / \hat{\sigma}_{\nabla_i}|$
- 4) Om største beregnede tallverdi $t_i > T_{(n-e-1)}$ fra tabell, forkastes nullhypotesen. Det betyr at det finnes minst en signifikant (statistisk sett betydelig) grov feil i data. Observasjonen med den største beregnede t fjernes.
- 5) Testen (trinn 1-4) gjentas inntil ingen $t_i > T_{(n-e-1)}$ (nullhypotesen ikke kan forkastes)

Grunnlagstest

Ved bruk av punktobservasjoner er ikke en tradisjonell grunnlagstest relevant. En punktobservasjon er en avledet observasjon i form av 3D-koordinater f.eks. (N, E, H) og deres kovariansmatrise. I en utjevning defineres punktets koordinater som ukjente parametere. Koordinatene for det ukjente punktet tillates å endres gjennom utjevning, til forskjell fra fastholdte grunnlagspunkter.

Indre pålitelighet

I en indre pålitelighetsanalyse undersøkes:

- 1) Hvor stor en mulig *gjenværende grov feil* kan være uten å bli oppdaget, og
- 2) I hvilken grad observasjonenes gjensidig «kontrollerer» hverandre (redundansmatrisa)

Den vanligste metoden for å beregne størrelsen på en mulig *gjenværende grov feil*, er å beregne et konfidensintervall omkring hver enkelt observasjons estimerte grovfeil. Fra *multippel-T*-testen er *grovfeil* og deres standardavvik allerede estimert. *Største gjenværende grovfeil* defineres som endepunktet i konfidensintervallet med størst tallverdi:

$$\left[\hat{\nabla} - \hat{\sigma}_{\nabla} \cdot T_{\alpha/2, (n-e)}, \hat{\nabla} + \hat{\sigma}_{\nabla} \cdot T_{\alpha/2, (n-e)} \right] \quad T\text{-verdien hentes fra tabell. } \alpha = 5\% \text{ er et vanlig valg.}$$

Antall overbestemmelser (redundans), og hvordan en kombinerer observasjonene (designer nettet) er avgjørende for god kontrollerbarhet. Redundansmatrisa \mathbf{R} , er sentral, se (Leick 2004). Elementenes tallverdier utenfor diagonalen angir i hvilken grad en gjenværende grov feil i en observasjon vil synes i utjevningskorreksjonen til de andre observasjonene.

Diagonalelementene forteller i hvilken grad en eventuell *gjenværende grov feil* blir synlig i den tilhørende observasjonens korreksjon. Ved stor redundans (tallverdi nær 1) er $\hat{v}_i^* \approx -\hat{\nabla}_i$.

Summen av tallverdiene til elementene i diagonalen er lik nettets totale redundans ($n-e$). Med dagens rasjonelle måleutstyr kan en raskt måle litt ekstra for å styrke redundansen, men en bør også legge vekt på hvor det bør måles.

Ytre pålitelighet

Ytre pålitelighet forteller hvor stor endring en *største gjenværende grov feil* kan gjøre på de ukjente (N, E, H) eller en funksjon av disse.

- Først forutsettes at observasjonstest er gjennomført, og alle *grovfeil* fjernet.
- Tallverdier for *Største gjenværende grovfeil* er kjent fra *indre pålitelighetsberegning*.
- Tallverdier for ytre pålitelighet beregnes etter 1) en utjevning med, og 2) en utjevning uten den største gjenværende grovfeil i en observasjon. Med n observasjoner gir dette n stk. beregninger.

Den mest intuitive varianten av ytre pålitelighet er kanskje *punktdeformasjon*.

Punktdeformasjon beregnes som virkningen på koordinatene av en *gjenværende grov feil* i en observasjon. Maksimal deformasjon er den deformasjonen som har størst tallverdi etter at alle n beregningene er utført.

Ved 2D-innmåling av et grensepunkt i tettbygde områder benyttes standarden *Stedfesting av matrikkelenhets- og råderettsgrenser* (Kartverket 2011). Strengeste toleransekrav til maksimal *ytre pålitelighet – punktdeformasjon* for grensemerker er satt til *10 cm*.

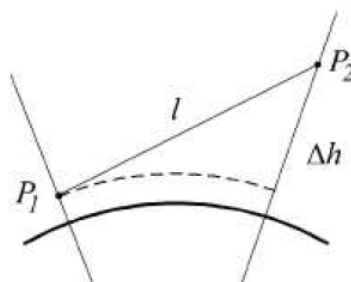
NS3580 og Grunnlagsnett har fokus på naboøyaktighet mellom punkter i fastmerkenett, og ikke enkeltpunkter. For ulike klasser av fastmerker er det satt toleransekrav til forbindelser i 1D: *Høydedeformasjon* og 2D: *målestokksdifferanser* og *vinkeldeformasjoner*. Alle forbindelser skal undersøkes, uansett om det er målt mellom punktene.

Beregning av ytre pålitelighet i høyde (1D)

Den største utfordringen ved vegbygging er høydekomponenten. I en 1D-analyse beregnes bl.a.: *Høydedeformasjoner*. Hvor mye deformeres en forbindelse: $\Delta H = H_2 - H_1$ mellom to punkter i det ferdig utjevnete nettet, som følge av en gjenværende grov feil?

Figur 5 er hentet fra standarden Grunnlagsnett (Kartverket 2009) og viser hvordan høydetoleranser beregnes. Høydetoleranser for det spesifikke fastmerkenettet i Figur 1 for de tre mest relevante klassene av fastmerkenett for vegbygging er beregnet og vist i Tabell 2.

$$\Delta = \sqrt{p^2 + 2 \frac{k^2}{l^2}}$$



Figur 5: Beregning av høydetoleranser er hentet fra standarden Grunnlagsnett

p i ppm, k i mm, velges ut fra (klasse)kravet til fastmerkenettet.

Δ i ppm ("parts per million" = milliontedeler)

l = skrå avstand i km (korteste avstand, ikke langs nivellement)

Tabell 2 Beregnede høydetoleranser for fastmerkenettet i figur 1 for de tre mest relevant klassene for vegprosjekt.

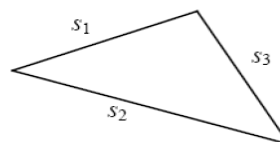
Klasse	Punkter i	Parameter for høyde		Tilsvarende toleranser	
		p ppm	k mm	ppm ($l=400m$)	Høydeforskjell ($l=400m$)
1	Områdetype 1: Byområde	5	5	18,4	7,3mm
	Bygg- og anleggsnett	10	10	36,7	14,7mm
2	Områdetype 2: Tettbygd/utbyggingsområder	20	20	73,5	29,4mm

Eksempelvis vil en mulig gjenværende grov feil, som forårsaker deformasjon større enn 14,7mm i høydeforskjell mellom to utjevnete punkter, innebære at toleransen for Bygg- og anleggsnett overskrides, uansett om det er målt mellom punktene.

Beregning av ytre pålitelighet i grunnriss (2D)

Standardene krever at beregnet ytre pålitelighet skal dokumenteres under toleransene for målestokksdifferanser [ppm] og vinkeldeformasjoner [ppm]. Etter overgangen fra NGO1948 til EUREF1989 som grunnlag, vil det normalt ikke by på problemer å tilfredsstille toleranser for målestokkdifferanser. Figur 6 er hentet fra standarden Grunnlagsnett (Kartverket 2009) og viser hvordan beregning av toleranser for to linjer s_1 og s_2 mellom et punkt og to vilkårlige andre punkter i innbyrdes avstand s_3 skal gjøres. p er en konstant knyttet til alle vinkler og målestokksdifferanser og k en konstant knyttet til det enkelte punkt. Tallverdier for p og k , gitt i standardene Grunnlagsnett og NS3580 for de aktuelle klasser av fastmerkenett for vegprosjekt er vist i Tabell 3.

$$\Delta = \sqrt{p^2 + \frac{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}{s_1^2 \cdot s_2^2}} k^2$$



Figur 6: Formel og figur fra (REF Grunnlagsnett) for beregning av toleranser for vinkel- og målestokksavvik Δ i ppm ("parts per million" = milliontedeler) s_1 , s_2 , s_3 i km

Tabell 3: p og k for formel i figur 6.

Klasse	Punkter i	Grunnriss	
		p [ppm]	k [mm]
1	Omr type 1/BA-nett	10	10
2	Omr type 2	20	20

Eksempelvis får en for punkt 2, med forbindelse mot punkt 1 og 3 i nettverket i Figur 1: S_1 og $S_3 = 0,4km$, $S_2=0,8km$ som gir $\Delta=62,048ppm$ som toleranse for målestokk.

Simulering

Et fastmerkenetts geometri (punktene plassering og hvordan de er forbundet med observasjoner) gjenspeiles i koeffisient- også kalt designmatrisen, A i norsk MKM-litteratur. Sammen med en vektmatrise oftest beregnet fra leverandørens antatte standardavvik, vil det være mulig å beregne teoretiske standardavvik til parameterne (N,E,H) for nye punkter i et fastmerkenett, uten at noen som helst målinger er gjort! En forundersøkelse av et nettverks kvalitet der en benytter fiktive/kunstige observasjoner kalles også for *simulering*.

Kvaliteten til fastmerkenett av typen som vist i Figur 1 skal undersøkes ved simulering. For å gjenspeile geometrien for et nett av fastmerker i et typisk vegprosjekt er punktene valgt med innbyrdes avstand eksakt lik 400m. For enkelhets skyld velges de på en rett linje i øst-vest-retning. Det vestligste punktet ligger i UTM32-sonesentrum, med koordinater $E=500000m$ og $N=7000000$. Ellipsoidehøyder for punktene er valgt slik at samtlige vil få normalhøyde 10.000m etter en transformasjon til NN2000 med modellen *HREF2016B_NN2000_EUREF89.bin*. Koordinater og høyder kan betraktes som «sanne verdier», og er vist i Tabell 4.

Tabell 4: Sanne verdier for det konstruerte fastmerkenettet i figur 1

Punkt	Nord	Øst	H_NN2000	Ellipsoidehøyde
1	7000000.000	500000.000	10.000	52.830
2	7000000.000	500400.000	10.000	52.819
3	7000000.000	500800.000	10.000	52.808
4	7000000.000	501200.000	10.000	52.797
5	7000000.000	501600.000	10.000	52.786
6	7000000.000	502000.000	10.000	52.776
7	7000000.000	502400.000	10.000	52.765
8	7000000.000	502800.000	10.000	52.754
9	7000000.000	503200.000	10.000	52.744

Egnede sett av fiktive observasjoner konstrueres med målevariasjon generert fra normalfordelinger med leverandørens oppgitte (teoretiske) standardavvik for det aktuelle måleutstyr som input. Det antas benyttet en typisk ett-sekunds totalstasjon og GNSS-punktobservasjoner mot CPOS i områder med henholdsvis 35 og 70km mellom permanente GNSS-stasjoner (PGS).

Fiktive punktobservasjoner

Tilfeldig normalfordelt målevariasjon til punktobservasjoner genereres fra normalfordelinger med forventning null og standardavvik fra CPOS-tabellen i Figur 4. Et fiktivt punktobservasjons-sett konstrueres av fem punktobservasjoner i hver av nettets 9 punkter med koordinater og høyder som vist i Tabell 4, pålagt tilfeldig målevariasjon. I alt er det konstruert 20 fiktive sett av punktobservasjoner, 10 sett for analyse av nett i områder med 35 km mellom PGS, og 10 sett for analyser av nett i områder med 70 km mellom PGS.

Fiktive observasjoner med totalstasjon

Med trykk og temperaturforhold tilnærmet instrumentets normaltemperatur skal en «råmålt» avstand med høyde 10m i NN2000 og geoidehøyde ca. 42.8m, korrigeres for kartprojeksjon og høyde over ellipsoiden (Skogseth and Norberg 2014). For nettet i Figur 1 utgjør dette henholdsvis 0.1634m for punkt 1-6, og 0.1633m for punkt 6-9.

Med refraksjonskoeffisient $k=0.18$ og tilnærmet horisontale sikt utgjør høydekorreksjon for jordkrumning og lysbrytning (refraksjon) ($J-L$) 0.0103m over en avstand på 400m. Det tilsvarer en korreksjon på 0,0016339 gon på vertikalvinkelen. Teoretiske totalstasjonsobservasjoner uten målevariasjon er gitt i Tabell 5. Den lille variasjonen i vertikalvinkel skyldes den lille forskjellen en får for en avstand, når en regner seg fra kartplanet og tilbake til en fiktiv målt avstand.

Tabell 5: Fiktive totalstasjonsobservasjoner før målevariasjon legges til.

Fra	Til	Hor. retning	Vert. Vink.	Avst	lh	sh
1	2	300,00000	100,00163	400,1634	0,000	0,000
2	1	100,00000	100,00163	400,1634	0,000	0,000
2	3	300,00000	100,00163	400,1634	0,000	0,000
3	2	100,00000	100,00163	400,1634	0,000	0,000
3	4	300,00000	100,00163	400,1634	0,000	0,000
4	3	100,00000	100,00163	400,1634	0,000	0,000
4	5	300,00000	100,00163	400,1634	0,000	0,000
5	4	100,00000	100,00163	400,1634	0,000	0,000
5	6	300,00000	100,00163	400,1634	0,000	0,000
6	5	100,00000	100,00163	400,1634	0,000	0,000
6	7	300,00000	100,00164	400,1633	0,000	0,000
7	6	100,00000	100,00164	400,1633	0,000	0,000
7	8	300,00000	100,00164	400,1633	0,000	0,000
8	7	100,00000	100,00164	400,1633	0,000	0,000
8	9	300,00000	100,00164	400,1633	0,000	0,000
9	8	100,00000	100,00164	400,1633	0,000	0,000

Tilfeldig målevariasjon generert fra to normalfordelinger med forventning null og standardavvik henholdsvis $\sigma=0,0003$ gon (retning) og $\sigma=1.4$ mm (avstand) legges på de teoretiske målingene i Tabell 5.

Resultater

Fire observasjonskombinasjoner av fastmerkenettet i Figur 1 er undersøkt.

- 1) 70km mellom PGS (kun punktobservasjoner)
- 2) 35km mellom PGS (5 punktobs + polygondrag)
- 3) 70km mellom PGS (5 punktobs + polygondrag)
- 4) 70km mellom PGS (5 punktobs + 2 polygondrag)

I hver enkelt analyse er det utført observasjonstest, beregning av indre- og ytre pålitelighet og utjevning. I de fiktive observasjonsdataene vet vi at det ikke finnes ingen grove feil. Om observasjoner flagges med eventuelle grov feil, beholdes de likevel i den videre analysen.

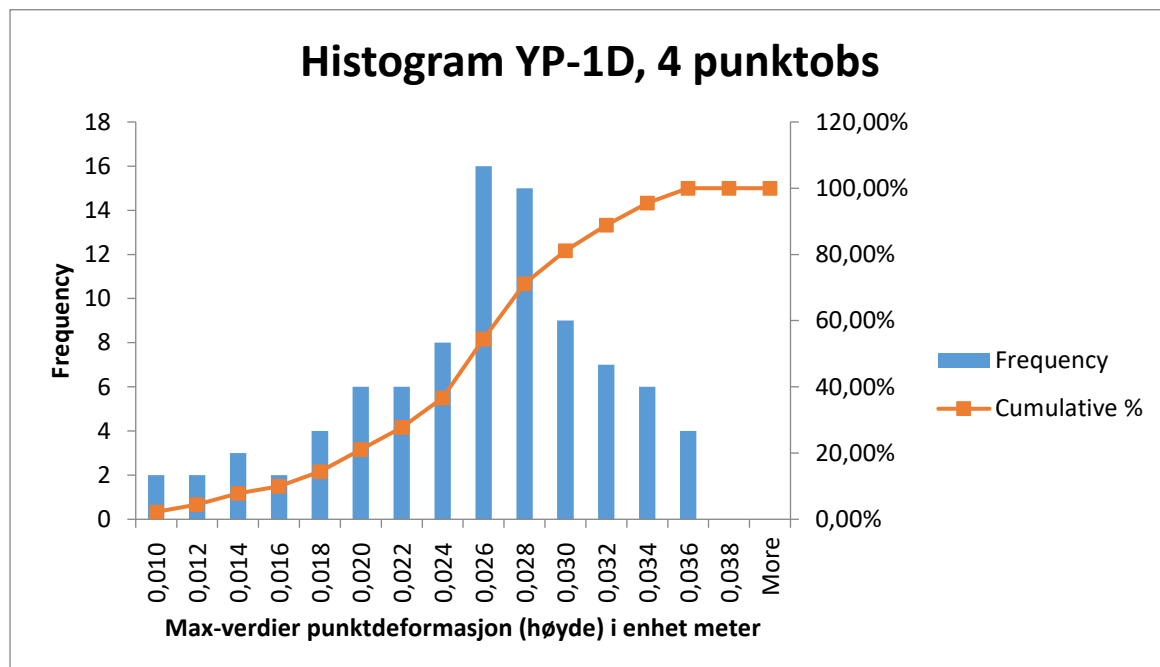
1) 70km mellom PGS (kun punktobservasjoner)

10 simuleringer med kun punktmåling i hver av de 9 punktene i nettet i Figur 1, er gjort for fire forskjellige situasjoner.

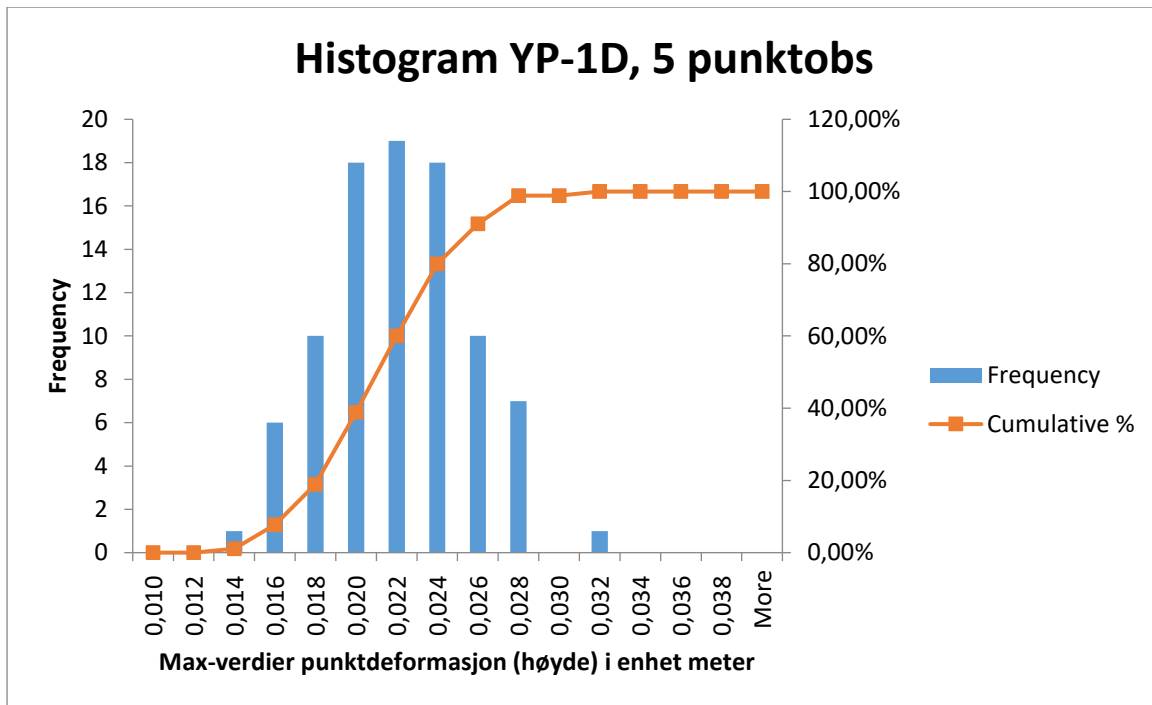
Figur 7 og Figur 8 viser simulert 1D-punktdeformasjon (høyde) med henholdsvis 4 og 5 punktobservasjoner. Figur 9 og Figur 10 viser simulert 2D-punktdeformasjon (kartplan) med henholdsvis 4 og 5 punktobservasjoner. Output fra hver av de fire beregningene er 90 maksimale verdier for punktdeformasjon.

YP-1D

Beregnete tallverdier for maksimal ytre pålitelighet i høyde med 4 punktobservasjoner varierte mellom minste verdi 9mm og største verdi 36mm. Gjennomsnittlig maksimalverdi var 25mm. Med 5 punktobservasjoner varierte maksimalverdiene fra 14 til 31 mm og gjennomsnittlig maksimalverdi på 22mm.



Figur 7 Histogram med 90 simulerte verdier for ytre pålitelighet i høyde med 4 punktobservasjoner. Kumulativt histogram viser at 81% av max-verdiene (73 av 90) er 30mm eller mindre.

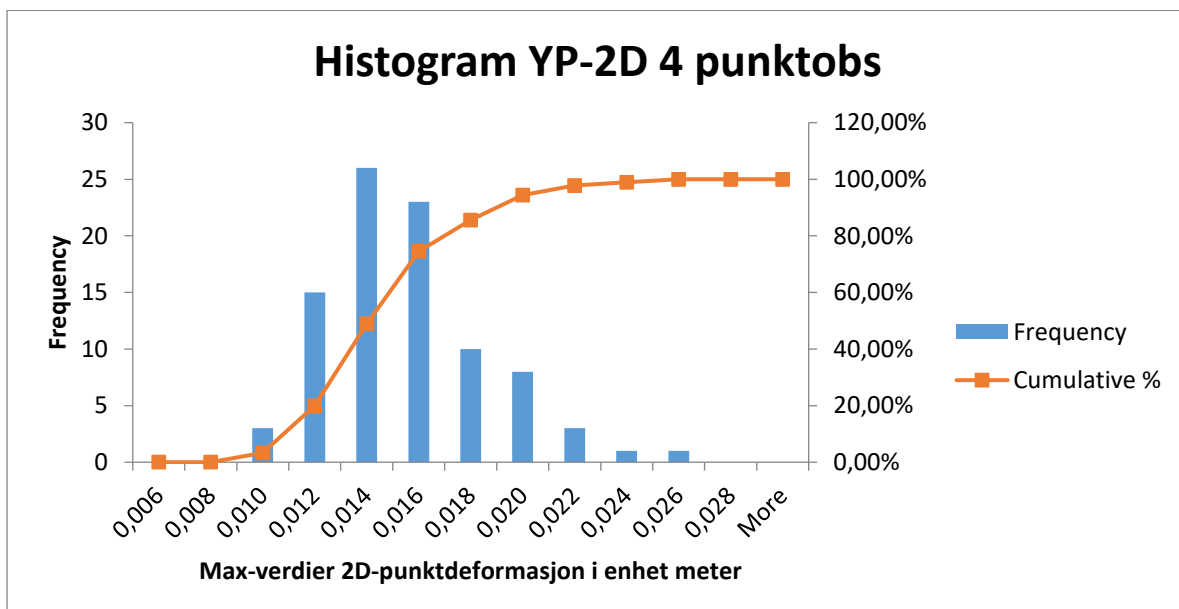


Figur 8 Histogram med 90 simulerte verdier for ytre pålitelighet i høyde med 5 punktobservasjoner. Kumulativt histogram viser at 99% av max-verdiene (89 av 90) er 30mm eller mindre.

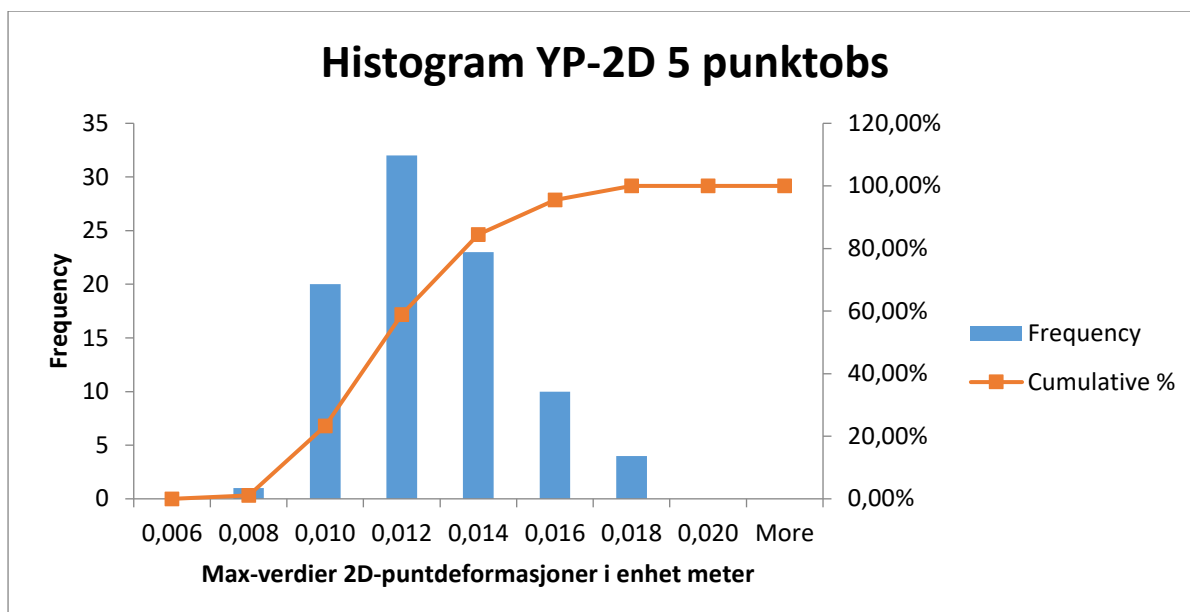
YP-2D

Beregnete maksimalverdier for ytre pålitelighet i grunnriss med 4 punktobservasjoner varierte mellom minste verdi 10mm og største verdi 25mm. Gjennomsnittsverdien var 15mm.

Med 5 punktobservasjoner varierte maksimalverdiene fra 8 til 18 mm og gjennomsnitt 12mm.



Figur 9 Histogram med 90 simulerte verdier for ytre pålitelighet i grunnriss med 4 punktobservasjoner. Kumulativt histogram viser at 94% (85 av 90) max-verdier er 20mm eller mindre



Figur 10 Histogram med 90 simulerte verdier for ytre pålitelighet i grunnriss med 5 punktobservasjoner. Kumulativt histogram viser at 100% (90 av 90) max-verdier er 20mm eller mindre

Simuleringen er gjort med antatte standardavvik i et område med 70 km mellom PGS. En bør kunne forvente bedre resultater for en simulering i et område med 35km mellom PGS

2) 35km mellom PGS (5 punktobs + polygondrag)

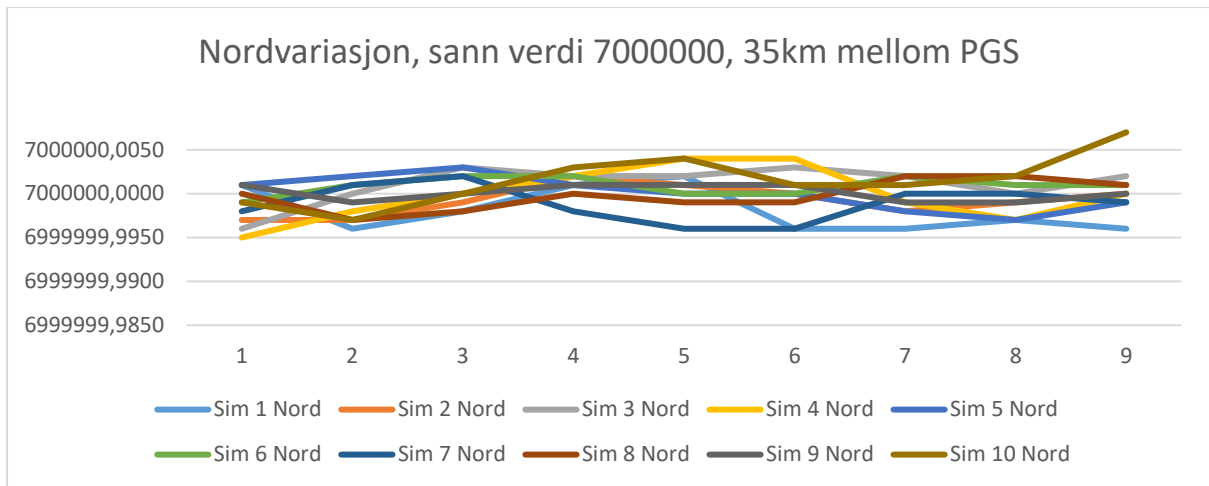
I denne simuleringen er det benyttet fem GNSS-punktobservasjoner i hvert punkt (i område med 35km mellom PGS) og middel av fire helsatser og avstander tilsvarende et tradisjonelt polygondrag målt med totalstasjon fra punkt 1 til 9. I endepunktene er ikke horisontalvinkler målt. Dette gir et godt bestemt nett med 183 observasjoner og 36 ukjente, dvs. 147 overbestemmelser (frihetsgrader).

Tabell 6 viser analyseresultater fra 10 simuleringer i et område med gjennomsnittlig tetthet 35km mellom PGS. Samtlige 10 ble godkjent med de strengeste toleransekrav, både i høyde og grunnriss!

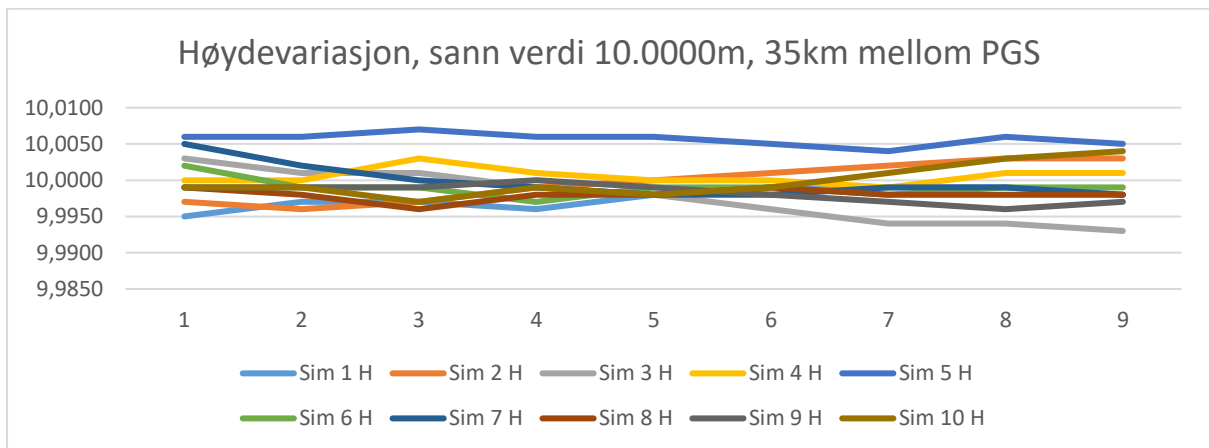
Tabell 6: Analyseresultater i området med 35km mellom PGS

3D-analyse 35km, simulering nummer:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antall grove feil	1	2	0	0	0	0	0	0	1	0
YP Høyde ($k=5, p=5$) Byområde	😊	😊	😊	😊	😊	😊	😊	😊	😊	😊
YP Grunnriss ($k=10, p=10$) Byområde	😊	😊	😊	😊	😊	😊	😊	😊	😊	😊

Figur 11 og Figur 12 illustrerer variasjonen på utjevnedde komponentverdier i henholdsvis nord- og høyde for alle 9 punkter i de 10 simuleringene i området med 35km mellom PGS.



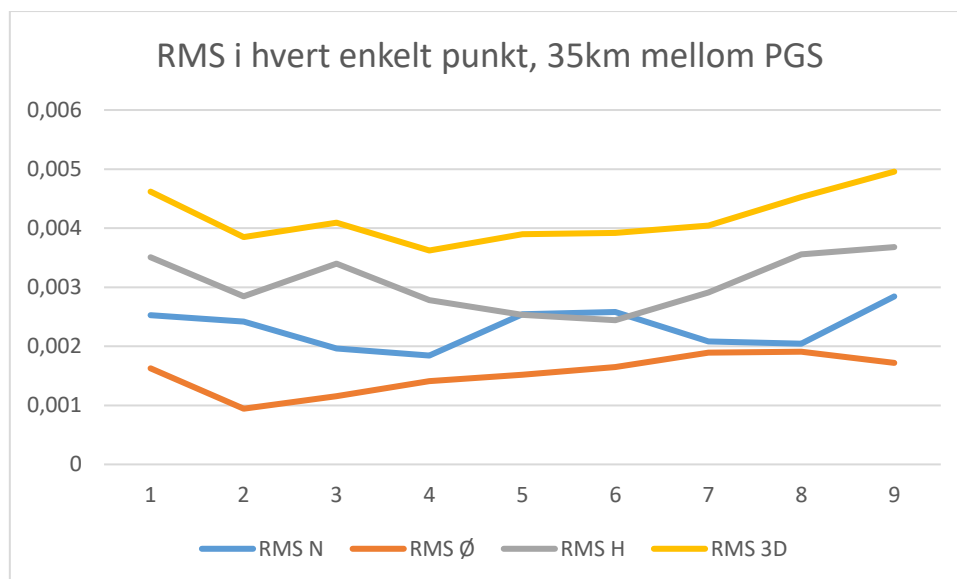
Figur 11 viser 10 simuleringers variasjon i nord-retning. Punktnummer langs horisontal akse. Enhet for vertikal akse er meter.



Figur 12 viser 10 simuleringers variasjon i høyde. Punktnummer langs horisontal akse. Enhet for vertikal akse er meter.

Høydekomponenten i simulering nummer 5 ser ut til å avvike mest fra de sanne verdier. Det er ikke funnet noen annen forklaring til tallverdiene i dette genererte datasettet, enn den tilfeldige variasjon.

I en virkelig verden kjenner vi ikke de *sanne verdier* eller *sanne feil*. Ved en simulering konstrueres fiktive observasjonene med utgangspunkt i «sanne verdier». RMS-verdier i hvert punkt kan derfor beregnes med de *sanne feil* = *utjevne* - *sanne verdier*. Med utjevne koordinater og høyder fra de ti utjevningene er RMS-verdier for nord-, øst-, og høydekomponentene estimert. I tillegg er 3D-RMS beregnet med formel (9) og plottet sammen med RMS for hver komponent i Figur 13.



Figur 13: RMS-verdier for punktene i området med 35km mellom PGS

Resultatene viser ikke uventet at østkomponenten blir best bestemt. RMS er mellom en og to millimeter. Øst blir trolig bedre bestemt enn nord fordi vi i dette spesielle nettet har gode avstandsmålinger kun i lengderetningen øst-vest. Nord-komponentenes RMS-verdier ligger stort sett mellom to og tre millimeter. Ikke uventet er høydebestemmelsen dårligst med RMS fra 2,5 til 3,5mm. Resultatene stemmer veldig bra med hva som var forventet. Antatt RMS i høyde var 3mm for hver av punktene. Det virker fornuftig at høydebestemmelsen er best i den midterste delen av nettet, og dårligst ut mot endepunktene. En får ikke det samme problem som med tradisjonelle polygondrag, størst usikkerhet på midten. Det er tydelig at punktmålingene «stiver av» ganske godt på midten for alle tre komponenter.

3) 70km mellom PGS (5 punktobs + polygondrag)

I simuleringen benyttes fem GNSS-punktobservasjoner i hvert punkt (i område med 70km mellom PGS) og middel av fire helsatser og avstander tilsvarende et tradisjonelt polygondrag målt med totalstasjon fra punkt 1 til 9. I endepunktene er ikke horisontalvinkler målt. Som i forrige simulering gir dette 147 overbestemmelser (frihetsgrader).

Tabell 7 viser resultater fra 10 simuleringer i et område med gjennomsnittlig tetthet 70km mellom PGS. I hver simulering er observasjonene en kombinasjon av fem GNSS-punktmålinger og et tradisjonelt polygondrag (middel av fire helsatser) fra punkt 1 til 9. I endepunktene er ikke horisontalretninger målt.

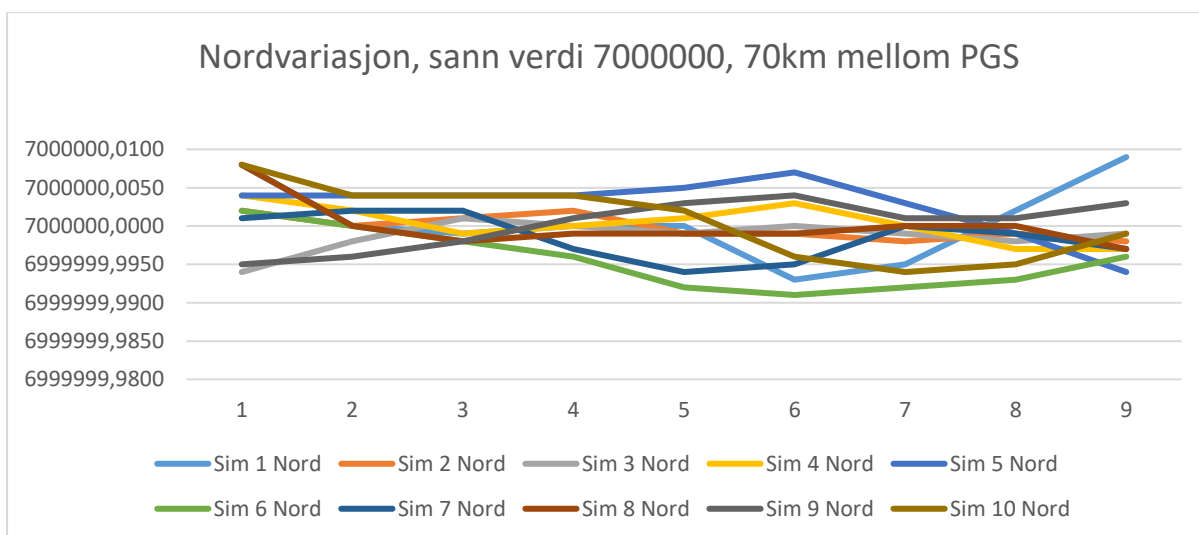
Tabell 7: Resultater fra 10 simuleringer i området med 70km mellom PGS

3D-analyse 70km nr:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antall grovfeil	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
YP Høyde ($k=5, p=5$) Byområde	-	☺	-	☺	☺	☺	☺	-	☺	☺
YP Høyde ($k=10, p=10$) BA-nett	☺		☺					☺		

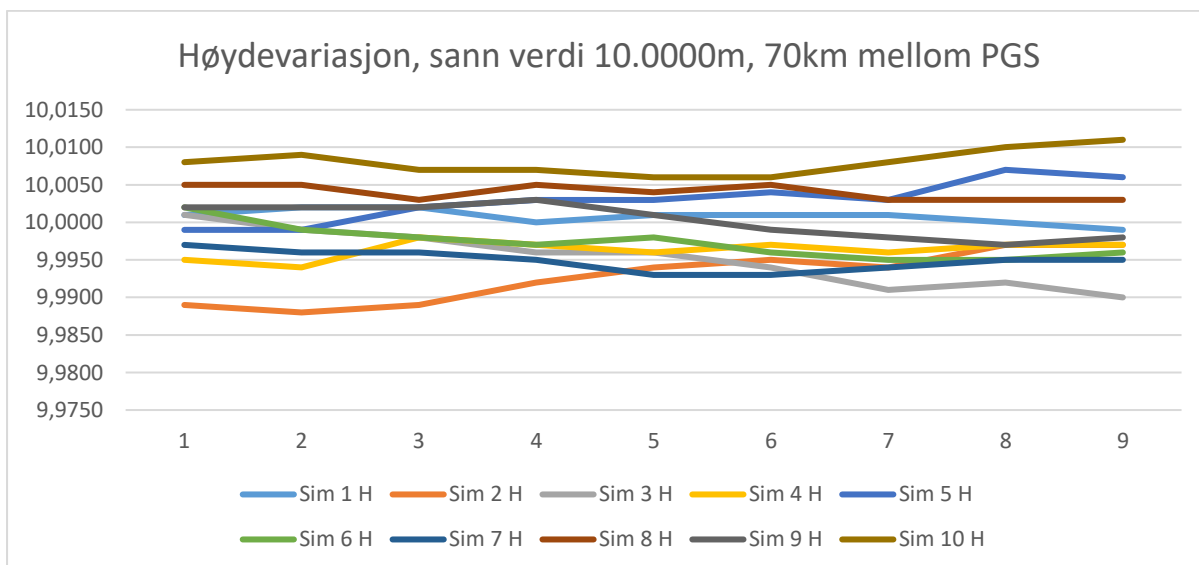
YP Grunnriss ($k=10, p=10$) Byområde/BA	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
YP Grunnriss ($k=20, p=20$) område type 2	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺

7 av 10 simuleringer tilfredsstillte det strengeste toleransekravet til ytre pålitelighet i høyde, mens de resterende tre tilfredsstillte toleransekravet for bygg- og anleggsnett. Store vinkeldeformasjoner i endene av nettet viser seg å bli et problem i grunnrissberegningene. Ikke i en eneste simulering tilfredsstilles normkravet for byområder eller bygg- og anleggsnett i området med 70km mellom PGS. I samtlige 10 simuleringer tilfredsstilles derimot grunnrisskravet for område type 2.

Figur 14 og Figur 15 viser variasjonen til de utjevnete 9 punktene i henholdsvis nord- og høyde for samtlige 10 simuleringer i området med 70km mellom PGS. Som forventet er variasjonen større for et område med 70km mellom PGS enn tilsvarende figurer med 35km mellom PGS.

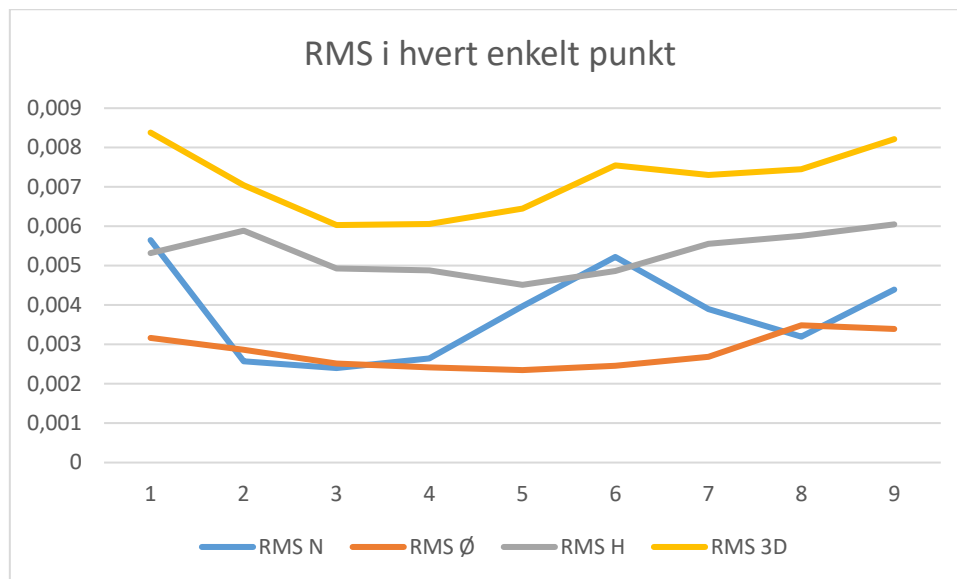


Figur 14 viser variasjon i nord-retning. Punktnummer langs horisontal akse. Enhet for vertikal akse er meter.



Figur 15 viser 10 simuleringers variasjon i høyde. Punktnummer langs horisontal akse. Enhet for vertikal akse er meter.

Figur 16 viser RMS-verdier i hvert punkt beregnet med sanne feil = utjevne - sanne verdier fra samtlige ti simuleringer. Som forventet er alle verdier større med 70km, enn i områder med 35 km mellom PGS.



Figur 16: RMS-verdier for punktene i området med 70km mellom PGS

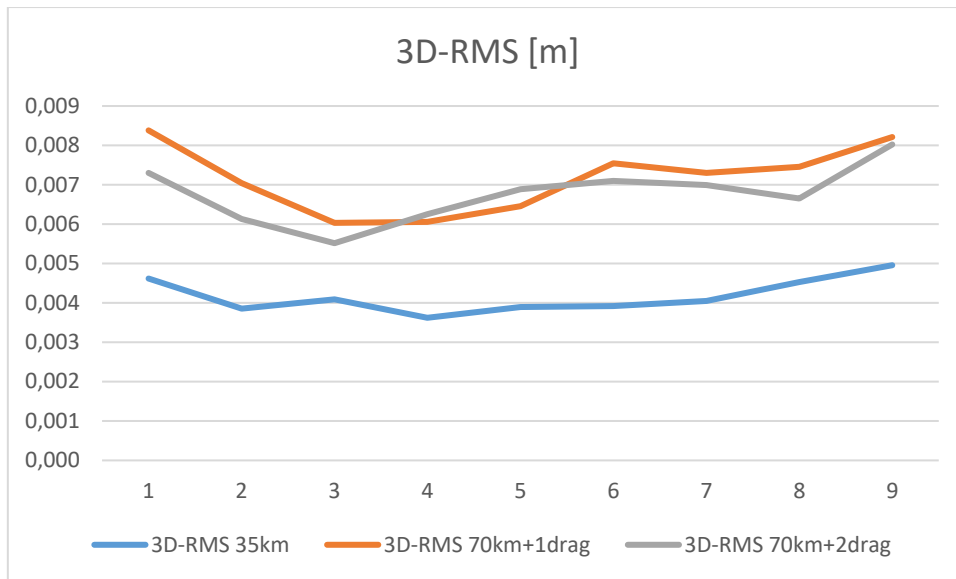
I Figur 16 varierer 3D-RMS mellom 6 og 8,5 mm mellom de 9 fastmerkene. Den samme tendensen som i 35km-området vises, med bedre punktbestemmelse i midten av draget. Også her blir østkomponenten best bestemt, med RMS mellom to og tre millimeter. Øst blir bedre bestemt enn Nord fordi vi i dette tilfellet har gode avstandsmålinger kun i lengderetningen øst-vest. Nord-komponentenes RMS-verdier varierer mellom to og seks millimeter. Ikke uventet er høydebestemmelsen også her dårligst med RMS fra 4,5 til 6mm, noe som stemmer bra med forventningene på ca. 5mm. 3D-RMS varierer fra 6 til 8,5 mm for de 9 fastmerkene.

4) 70km mellom PGS (5 punktobs + 2 polygondrag)

Den ytre påliteligheten for «vinkeldeformasjoner» i grunnriss vil forbedres om en legger til flere observasjoner. I landmålingsbasene fra forrige forsøk leses det derfor inn ytterligere et polygondrag, målt med samme type totalstasjon. Observasjonsregistrene i simuleringene inneholder fem sanntids-GNSS-målinger i hvert punkt, samt observasjoner fra to uavhengig målte polygondrag. Antall overbestemmelser øker fra 147 til 186.

Figur 17 viser plott av 3D-RMS simuleringer med tre variantene av observasjoner.

- 1) Polygondrag og punktmåling med sanntids-GNSS med 35km mellom PGS
- 2) Polygondrag og punktmåling med sanntids-GNSS med 70km mellom PGS
- 3) To uavhengige polygondrag og punktmåling med sanntids-GNSS og 70km mellom PGS



Figur 17 viser 3D-RMS fra simuleringer med de tre observasjonsvariantene

Figur 17 viser at det ikke blir særlig stor endring i 3D-RMS om en legger til et ekstra polygondrag i områder med 70 km mellom basene. Gjennomsnittlig for alle 9 punkter oppnås for de tre simuleringene 3D-RMS på henholdsvis 4,2mm ,7,2mm og 6,8mm. Relativt fastmerkenettet 1) med 35 km mellom basene øker 3D-RMS med 72% for fastmerkenett 2) og 62 % for fastmerkenett 3). Reduksjonen en oppnår i 3D-RMS ved å legge til et polygondrag i områder med 70km mellom PGS blir kun 6%.

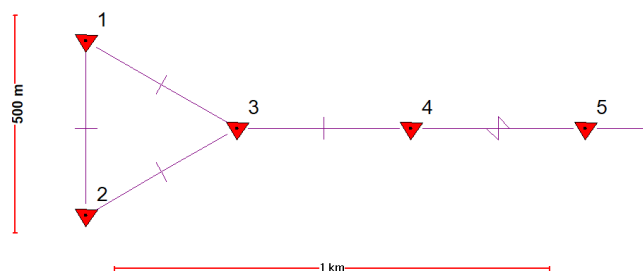
Desto gledeligere, den beregnede ytre pålitelighet er markant forbedret. I samtlige 10 simuleringer er ytre pålitelighet godt under det strengeste normkravet (byområde) både i plan og høyde. Det kan forklares med forbedret kontrollerbarhet. Med et dobbelt målt polygondrag vil en mulig gjenværende grovfeil ikke være lett å gjemme. Redundansmatrisen er betydelig forsterket og virkning/effekt på forbindelsene ved beregning av målestokk- og vinkeldeformasjon blir veldig mye mindre når en mulig grov feil lettere kan oppdages.

Konklusjoner

Norske standarder krever dokumentert ytre pålitelighet beregnet i et tvunget nett. Avgjørende faktorer i en beregning med reelle data vil være:

- Nettets geometri
- I hvilken grad observasjonenes kontrollerer hverandre
- Antall overbestemmelser (Redundans)
- Reelle observasjoners nøyaktighet, ikke bare utstyrets oppgitte presisjon
- Grunnlagspunktets homogenitet og kvalitet

Resultater fra simuleringene viser at det er mulig å oppnå gode resultater om en benytter punktobservasjoner fra sanntids-GNSS i kombinasjon med totalstasjonsobservasjoner. Om nettet i en første fase ikke tilfredsstillende det ytre pålitelighetskravet, er mulig å forbedre med supplerende totalstasjonsmålinger. For et overbestemt fastmerkenett, strengt sammenbundet med kontrollerbare presise totalstasjonsmålinger vil nettes absolutte nøyaktighet bestemmes av punktmålingenes antall og nøyaktighet. Mange uavhengige punktmålinger gir en midlingseffekt som forbedrer absolutt nøyaktighet for nettet som helhet. Med riktig vektning forringes ikke den gode relative (nabonøyaktigheten). De ytterste to endepunktene i hver ende av nett som vist i Figur 1 er mest sårbare ved beregning av ytre pålitelighet. Slike nett kan forsterkes ved å dobbeltmåle med totalstasjon i de to siste punktene, eller en kan utforme nettet som en triangel i hver ende, se Figur 18.



Figur 18 Triangelutforming i nettets ender forbedrer den ytre påliteligheten

For fastmerkenett målt med sanntids-GNSS, sammenbundet i alle punkt med totalstasjonsmålinger viser simuleringer at en med metoden kan:

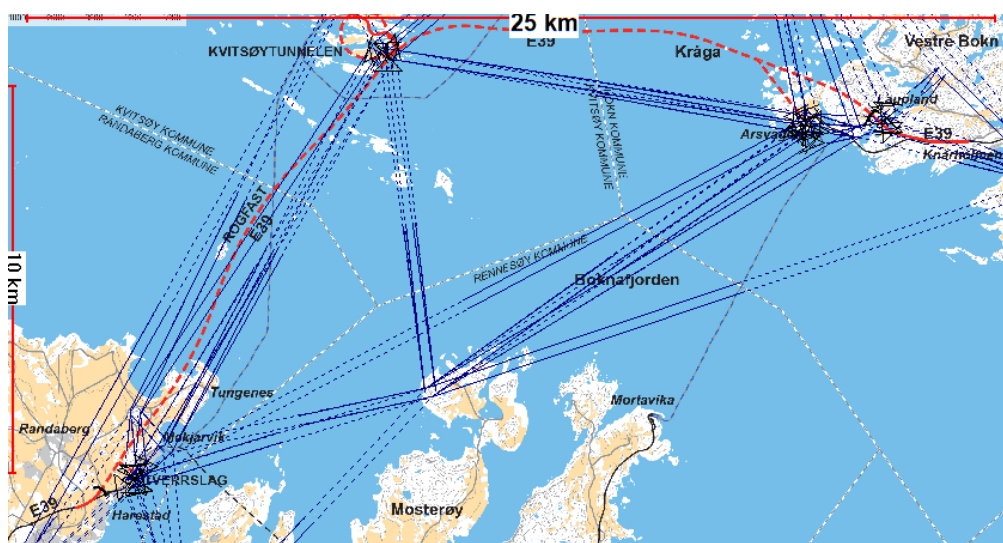
- Tilfredsstillende selv de strengeste toleransekrav til ytre pålitelighet for fastmerkenett.
- Oppnå 3D-RMS under en centimeter, relativt valgt referanseramme (PGS).
- Oppnå omtrent samme kvalitet for alle punkter, noe som er ønskelig.
- Gi en rasjonaliseringsgevinst for måling og beregning opp til 50%
- Enkelt «låse nettet fast» i valgte (juridiske) landsnett- eller punkt på naboparsell.
- Lettere identifisere grove feil i punktmålinger, enn i statisk målte GNSS-vektorer.

Simulering tar utgangspunkt i en ideell verden med antatt (optimistisk) utstyrsnøyaktighet, uten forekomst av systematiske eller grove feil. Det er en stor forskjell på fiktive og ekte observasjoner. Eksempelvis kan en totalstasjons retningsnøyaktighet $\sigma=0,3\text{mgon}$ horisontalt og vertikalt kun oppnås under optimale vær og lysforhold. Dessuten er korrelasjon mellom retninger, og korrelasjon mellom nabopunkt ignorert i simuleringen. Før metoden kan «adopteres» i standarder og håndbøker må den derfor testes ut med ekte observasjoner.

- Med reelle måledata er problemet å identifisere og luke ut grove feil. For å være sikre på at alle *grovfeil* er fjernet plukker en gjerne litt for mange/filtrerer en litt strengt.
- «Halv»grove feil, eller systematiske (instrument)feil er det ikke lett å identifisere. De «smøres utover» i nettet og øker størrelsen på beregnede standardavvik.
- Forskjeller ved dårlig og god punktmåling ivaretas ved reelle målingers innbyrdes vektning av enkeltmåling.
- For reelle punktmålinger med sanntids-GNSS skal estimerte kovariansmatriser benyttes.
- Satellittkonstellasjoner i Norge har ofte færre satellitter nord-sør for det målte punktet enn i øst-vest-retning. Med reelle GNSS-data forventes dårligere bestemmelse i nord-enn i østretning sammenlignet med simuleringen.

Det er ikke alltid mulig å knytte sammen punkter i et fastmerkenett med siktelinjer kortere enn 400m. I spesielle prosjekter der en behøver grupper av godt bestemte fastmerker, f.eks. utenfor tunnellinnhogg, vil det fortsatt være behov for klassisk statiske GNSS-vektorer for å sikre punktgruppens orientering/retning der dette er nødvendig.

Metoden er ikke undersøkt for fastmerkenett der sammenbinding med totalstasjon for hver 400m ikke er mulig. Kan en ikke knytte punktgrupper sammen med totalstasjon er det en risiko for «rotasjon» mellom punktgruppene. Figur 19 viser observasjonsrisset for bygg- og anleggsnettet på ROGFAST-prosjektet, der verdens dypeste og lengste (26,7km) undersjøiske vegtunnel Boknafjordtunnelen skal bygges: <https://www.vegvesen.no/Europaveg/e39rogfast> Eventuelle rotasjonsfeil mellom punktgruppene ved tunnelinnhoggene vil slå ut som retningsforskjeller ved driving av tunneller fra to sider. Det er ikke praktisk mulig å designe et nett som kan sammenbindes med totalstasjon med maksimalt 400m mellom punktene. Derfor anbefales det fortsatt å knytte punktgrupper, f.eks. utenfor tunnelhogg sammen med metoden med klassisk statisk-GNSS for slike prosjekter.



Figur 19 Observasjonsriss med statisk-GNSS på ROGFAST-prosjektet

Skal et større nett måles oppholder en seg ofte mange dager i arbeidsområdet. For å unngå effekter som vist i Figur 3 anbefales det å strekke ut punktmålinger så langt det er praktisk mulig i tid, gjerne over flere dager. Basert på resultatene vist i histogrammene Figur 7 til Figur 10 foreslås toleransekrav for punktobservasjoner som vist i Tabell 8.

Tabell 8 Forslag til toleranser for punktmåling med sanntids GNSS

Punktdeformasjon	Toleranse
1D	30mm
2D	20mm
3D	36mm

Foreslåtte toleransekrav fra simuleringene bør undersøkes i praksis.

- CPOS-tabellen i Figur 4 er på antatt nøyaktighet basert på to satellittkonstellasjoner.
- Simuleringen er basert på normalfordelt målevariasjon uten grove feil
- Simuleringen har ikke tatt hensyn til korrelasjon mellom retninger.
- For reelle målinger benyttes estimert kovariansmatrise fra målingene
- Er reell målevariasjon større enn antatt i Figur 4 vil punktdeformasjon øke tilsvarende.
- I reviderte standarder kan en kreve, toleranse i 1D + 2D, eller kun 3D alene.

Referanser

Andersen, Ø. (1983). Grove feil i måledata og dens virkning på utjevningresultater. Kompendium, NLH, Ås.

Anderson, J. M., et al. (1998). Surveying: theory and practice. Boston, WCB/McGraw-Hill.

Baarda, W. (1968). A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks, Netherlands Geodetic Commission.

Geodatakvalitet (2015). Geodatakvalitet. Geodatakvalitetstandarden. Kartverket, Kartverket.

Ghilani, C. D. (2010). Adjustment computations: spatial data analysis. Hoboken, N.J., Wiley.

GISLINE (2019). Manual i GISLINE Landmåling.

Gjevestad, J. G. (2018). Kvalitetskontroll basert på multippel t-test.

Johnson, R. A. and D. W. Wichern (2002). Applied Multivariate Statistical Analysis, PRENTICE HALL, Upper Saddle River, New Jersey 07458.

Kartverket (2009). Grunnlagsnett, Norwegian Mapping Authority: 29.

Kartverket (2011). Stedfesting av matrikkelenhets- og råderettsgrenser Norwegian Mapping Authority, Statens kartverk Geodesi: 60.

Kartverket (2018). "Fakta om CPOS." from <https://www.kartverket.no/posisjonstjenester/cpos/>

Kartverket (Versjon 2.0 – april 2017). Posisjonstjenester i sanntid, Referansestasjoner og tjenester Norwegian Mapping Authority: 20.

Koch, K.-R. (2010). Parameter estimation and hypothesis testing in linear models. Berlin, Springer.

Leick, A. (2004). GPS satellite surveying. Hoboken, N.J., Wiley.

NS3580 (2015). "NS3580: 2015 Bygg- og anleggsnett - Ansvarsfordeling, kvalitetskrav og metoder " Standard.no.

Skogseth, T. and D. Norberg (2014). Grunnleggende landmåling, Gyldendal undervisning.



Statens vegvesen
Pb. 1010 Nordre Ål
2605 Lillehammer

Tlf: (+47)22073000
firmapost@vegvesen.no

ISSN: 1893-1162

vegvesen.no

Trygt fram sammen