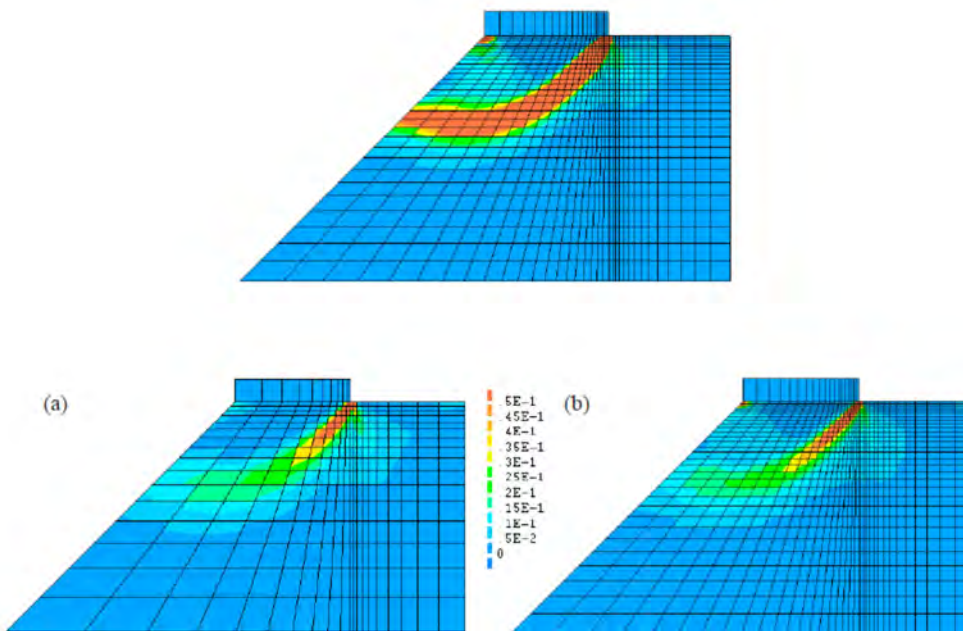




# Naturfareprosjektet DP.6 Kvikkleire Effekt av progressiv bruddutvikling for utbygging i områder med kvikkleire: Numerisk metode for beregning av udrenert brudd i sensitive materialer

55  
2014



R  
A  
P  
P  
O  
R  
T

Naturfareprosjektet: Delprosjekt 6. Kvikkleire

Effekt av progressiv bruddutvikling for utbygging  
i områder med kvikkleire:  
Numerisk metode for beregning av udrenert  
brudd i sensitive materialer

**Rapport nr. 55/2014**

Effekt av progressiv bruddutvikling for utbygging i områder med kvikkleire:  
Numerisk metode for beregning av udrenert brudd i sensitive materialer

**Utgitt av:** Norges vassdrags- og energidirektorat i et samarbeid med Statens vegvesen og Jernbaneverket

**Utarbeidet av:**

Gustav Grimstad og Hans Petter Jostad v/NGI

**Dato:** 02.05.2012

Opplag: P.O.D.

**ISBN:** 978-82-410-1107-1

**Avrop:**

Denne rapporten er en del av et samarbeidsprosjekt mellom Statens Vegvesen Vegdirektoratet (SVV), Norges Vassdrags og Energidirektorat (NVE) og NGI. Overordnet mål for samarbeidsprosjektet er å etablere et forbedret beregningsgrunnlag for etablering av sikkerhetsfaktorer og prosedyrer for prosjektering av bygg, anlegg og samferdsel i områder med kvikkleire eller meget sensitiv leire. Denne rapporten gir en beskrivelse av resultatene fra Aktivitet 1 "Numerisk metode for beregning av udrenert brudd i sensitive materialer".

**Emneord:** sprøbruddmateriale, progressivbrudd, strain softening, NGI-ADP soft

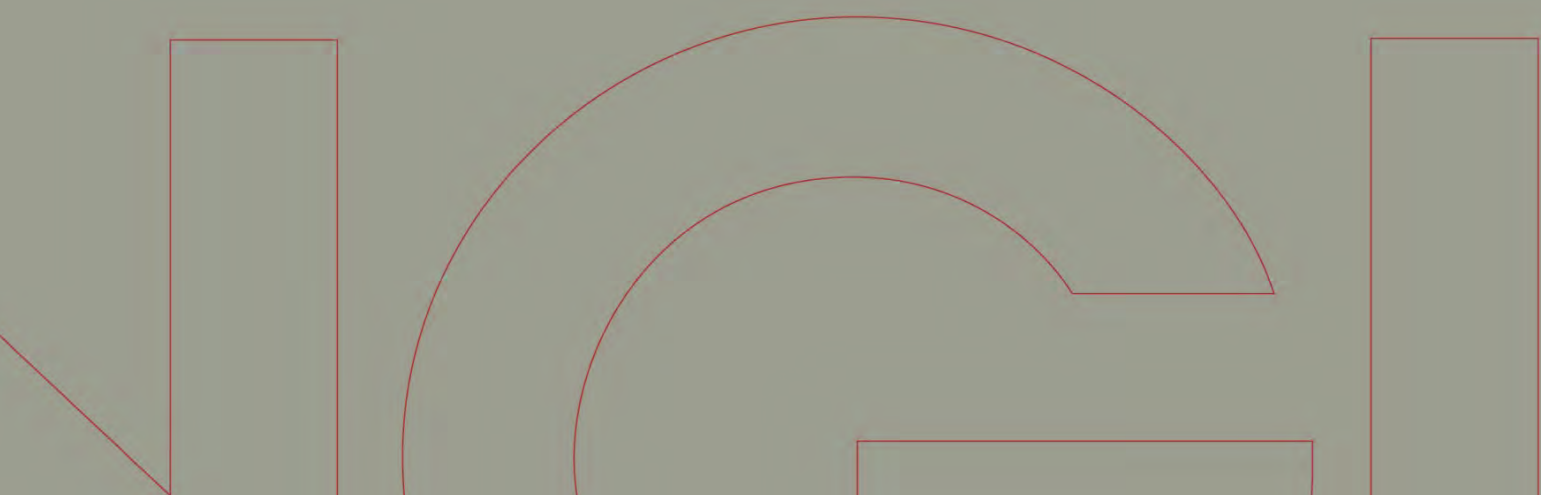


# Rapport / Report

## Effekt av progressiv bruddutvikling for utbygging i områder med kvikkleire

### A1 Numerisk metode for beregning av udrenert brudd i sensitive materialer

20092128-00-4-R  
12. mai 2014  
Rev.nr.: 0



Ved elektronisk overføring kan ikke konfidensialiteten eller autentisiteten av dette dokumentet garanteres. Adressaten bør vurdere denne risikoen og ta fullt ansvar for bruk av dette dokumentet.

Dokumentet skal ikke benyttes i utdrag eller til andre formål enn det dokumentet omhandler. Dokumentet må ikke reproduseres eller leveres til tredjemand uten eiers samtykke. Dokumentet må ikke endres uten samtykke fra NGL.

Neither the confidentiality nor the integrity of this document can be guaranteed following electronic transmission. The addressee should consider this risk and take full responsibility for use of this document.

This document shall not be used in parts, or for other purposes than the document was prepared for. The document shall not be copied, in parts or in whole, or be given to a third party without the owner's consent. No changes to the document shall be made without consent from NGL.



## Prosjekt

Prosjekt: Effekt av progressiv bruddutvikling for utbygging i områder med kvikkleire  
Dokumentnr.: 20092128-00-4-R  
Dokumenttittel: A1 Numerisk metode for beregning av udrenert brudd i sensitive materialer  
Dato: 12. mai 2014  
Rev.nr.: 0

Hovedkontor:  
Pb. 3930 Ullevål Stadion  
0806 Oslo

Avd Trondheim:  
Pb. 1230 Pirsenteret  
7462 Trondheim

T 22 02 30 00  
F 22 23 04 48

Kontonr 5096 05 01281  
Org. nr 958 254 318 MVA

[ngi@ngi.no](mailto:ngi@ngi.no)  
[www.ngi.no](http://www.ngi.no)

## Oppdragsgiver

Oppdragsgiver: Statens Vegvesen Vegdirektoratet  
Norges Vassdrags og Energidirektorat  
Oppdragsgivers kontaktperson: Roald Aabøe (Vegdirektoratet)  
Odd Are Jensen (NVE)  
Kontraktreferanse: Oppdragsbekreftelser datert 25. (SVV) og 10. (NVE) november 2010

## For NGI

Prosjektleder: Hans Petter Jostad  
Utarbeidet av: Gustav Grimstad/Hans Petter Jostad  
Kontrollert av: Hans Petter Jostad

## Sammendrag

Denne rapporten er en del av forskningsprosjektet: ”Effekt av progressiv bruddutvikling for utbygging i områder med kvikkleire”. Prosjektet er et samarbeidsprosjekt mellom Statens Vegvesen Vegdirektoratet (SVV), Norges Vassdrags og Energidirektorat (NVE) og NGI.

Overordnet mål for prosjektet er å etablere et forbedret beregningsgrunnlag for etablering av sikkerhetsfaktorer og prosedyrer for prosjektering av bygg, anlegg og samferdsel i områder med kvikkleire eller meget sensitiv leire.

BS EN ISO 9001  
Sertifisert av BSI  
Reg. No. FS 32989

# Sammendrag (forts.)



Dokumentnr.: 20092128-00-4-R  
Dato: 2014-05-12  
Rev.nr: 0  
Side: 4

Denne rapporten gir en beskrivelse av resultatene fra Aktivitet 1 ”Numerisk metode for beregning av udrenert brudd i sensitive materialer”.

En materialmodell med anisotrop udrenert skjærstyrke som reduseres (”softner”) med økende skjærtøyning mot en anisotrop residual skjærstyrke er forbedret og ferdigstilt. Numeriske problemer på grunn av ”softeningen” som for eksempel elementnettavhengige resultater er løst ved å inkludere en formulering basert på ”ikke-lokal tøyning”. Ved hjelp av denne metoden er det mulig å kontrollere tykkelsen på skjærsonen og dermed sprøheten til materialet i områder med ”softening”.

Materialmodellen er implementert som en brukerdefinert materialmodell (dll-fil) i elementmetodeprogrammet PLAXIS.

Rapporten presenterer input data til materialmodellen sammen med noen eksempler.

# Innhold

<b>1</b>	<b>Innledning</b>	<b>6</b>
1.1	Bakgrunn	6
<b>2</b>	<b>Teoretisk grunnlag</b>	<b>7</b>
2.1	NGI-ADPSOft	7
2.2	Softening-kurver	8
2.3	Ikke-lokal tøyning	9
2.4	Implementering av modellen i Plaxis	11
<b>3</b>	<b>Bruerveiledning</b>	<b>11</b>
3.1	Input	12
3.2	Beregninger	15
3.3	Resultater	16
<b>4</b>	<b>Eksempler</b>	<b>16</b>
4.1	Skjærkolonne	16
4.2	Biax (udrenert plantøyning kompresjonstest)	18
4.3	Enkel skråning	20
4.4	Bæreevne problem ”uten” singulære punkt	23
<b>5</b>	<b>Konklusjoner</b>	<b>26</b>
<b>6</b>	<b>Referanser</b>	<b>27</b>

**Vedlegg A – Matematisk formulering for NGI-ADPSOft**

**Vedlegg B – Artikkel: Grimstad, G., Andresen, L. and Jostad, H.P. (2010),  
“Undrained capacity analyses of sensitive clays using the  
nonlocal strain approach”, 9th HSTAM International Congress  
on Mechanics, Limassol, Cyprus, 12 – 14 July, 2010**

**Vedlegg C - Jostad, H.P., and Grimstad, G., 2011, “Comparison of  
distribution functions for the non-local strain approach”, 2nd  
International Symposium on Computational Geomechanics  
(ComGeo II), Cavtat-Dubrovnik, Croatia, 27-29 April, 2011**

**Kontroll- og referanseside**



## 1 Innledning

Denne rapporten er en del av prosjektet: ”Effekt av progressiv bruddutvikling for utbygging i områder med kvikkleire”. Prosjektet er et samarbeidsprosjekt mellom Statens Vegvesen Vegdirektoratet (SVV), Norges Vassdrags og Energidirektorat (NVE) og NGI. Overordnet mål for prosjektet er å etablere et forbedret beregningsgrunnlag for etablering av sikkerhetsfaktorer og prosedyrer for prosjektering av bygg, anlegg og samferdsel i områder med kvikkleire eller meget sensitiv leire.

Denne rapporten gir en beskrivelse av resultatene fra Aktivitet 1 ”Numerisk metode for beregning av udrenert brudd i sensitive materialer”. Rapporten gir en beskrivelse av en materialmodell som er implementert inn i elementmetodeprogrammet PLAXIS ([www.plaxis.nl](http://www.plaxis.nl)). Hovedfokus er lagt på anvendelse og brukerveiledning av beregningsprosedyren.

### 1.1 Bakgrunn

Ved stabilitetsberegninger for fyllinger, skjæringer og skråninger i områder med kvikke eller sensitive leirer benyttes grenselikevektsmetoden (f. eks. GeoSuite Stability eller Slope W) i standard prosjektering. Grenselikevektsmetoden som benyttes i disse programmene er basert på en antagelse om perfekt plastisk (duktil) oppførsel, mens meget sensitive og kvikke leirer defineres å ha en sprø oppførsel. Det er kjent (for eksempel Janbu, 1970; Bernander, 2000 & 2011; Andresen et al., 2002; Andresen og Jostad, 2004 & 2007) at sprøbruddoppførsel slik vi har i kvikkleirer kan føre til lavere bruddverdi og en annen type bruddmekanisme enn for perfekt plastiske leirer.

Det er gjort mye arbeid i Norge på kartlegging av kvikkleireområder og etterregning av skred ved bruk av tradisjonelle grenselikevektsmetoder. Imidlertid har det i løpet av de siste tjue årene internasjonalt og nasjonalt, innen geomekansk og andre mekanikkfag, blitt forsket mye for å bedre forståelsen av mekanismer knyttet til progressive brudd. Nasjonalt kan vi nevne grunnleggende studier på effekten av lokal drenasje fra tynne bruddsoner også kalt skjærbånd utført av Thakur (2007) og pågående arbeid av Ph.D. student Gylland (Gylland, 2009).

I tillegg har det ved NGI i løpet av de siste 10 årene blitt utviklet materialmodeller og analyseprogrammer som kan benyttes for å regne på brudd i sensitive leirer (Andresen et al., 2002; Jostad et al., 2006, Grimstad et al., 2010, Jostad og Grimstad, 2011). Grunnleggende innhold i disse beregningsmodellene er:

- Kompatibilitet i forskyvninger med tilhørende tøyninger, og likevekt mellom drivende krefter og stabiliserende spenninger beregnet ved hjelp av et elementmetodeprogram, for eksempel Plaxis ([www.plaxis.nl](http://www.plaxis.nl))

- Sammenheng mellom tøyninger og stabiliserende spenninger bestemt ved hjelp av en anisotrop elastoplastisk materialmodell, for eksempel NGI-ADPSOft (Grimstad et al. 2010)
- Problemet med nettavhengige resultater, hvor bruddoppførselen blir mer og mer sprø ved gjentatt forfining av elementnettet er for eksempel unngått ved å benytte en såkalt ”ikke-lokal” skjærtøyningsformulering som beskrevet i Grimstad et al. (2010) og Jostad og Grimstad (2011), i stede for den klassiske skjærtøyningen gitt av gradientene til forskyvningsfeltet
- Kontinuerlig oppdatering av geometrien i forbindelse med den progressive bruddutviklingen etter at skråningen har blitt ustabil er tatt hensyn til ved å benytte en stordeformasjonsformulering som for eksempel den som er tilgjengelig i Plaxis

Noen av disse punktene vil bli beskrevet nærmere i det neste kapittelet.

## 2 Teoretisk grunnlag

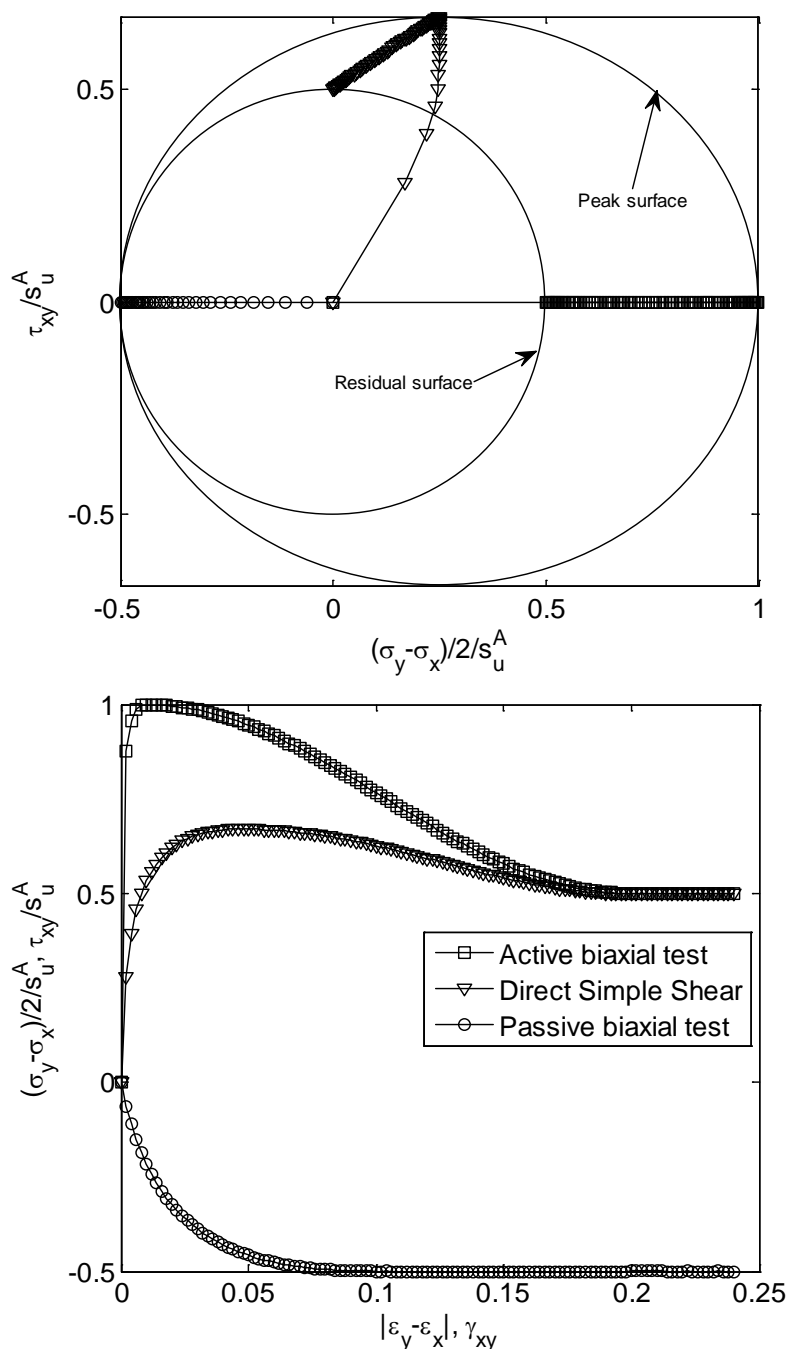
### 2.1 NGI-ADPSOft

NGI-ADPSOft er en totalspenningsbasert materialmodell som tar hensyn til anisotropi under udrenert oppførsel avhengig av deformasjonsretningen. Modellen benytter input fra udrenerte treaks kompresjon (trykk) forsøk ( $s_u^C$ ,  $s_{u_r}^C$ ,  $\gamma_p^C$ ,  $\gamma_r^C$ ), konstant volum direkte skjærforsøk ( $s_u^{DSS}$ ,  $s_{u_r}^{DSS}$ ,  $\gamma_p^{DSS}$ ,  $\gamma_r^{DSS}$ ) og udrenerte treaks ekspansjons (strekk) forsøk ( $s_u^E$ ,  $s_{u_r}^E$ ,  $\gamma_p^E$ ,  $\gamma_r^E$ ).  $s_u$  står for udrenert skjærstyrke, p for ”peak”, r for ”residual”,  $\gamma$  for skjærtøyning, C for kompresjon, DSS for direkte simpel skjær og E for ekspansjon. Det er i modellen antatt at udrenert treaks skjærstyrker,  $s_u^C$  og  $s_u^E$  er tilnærmet lik samsvarende udrenerte plantøynings skjærstyrker,  $s_u^A$  og  $s_u^P$ .

Figur 2.1 viser resultater fra simuleringer av udrenerte plantøyningsforsøk med de parameterne som er gitt i Tabell 2.1. Som det fremkommer i tabellen kreves også input av en elastisk stivhet, representert ved  $G_{ur}$ , og initial skjærmobilisering,  $\tau_0/s_u^A$ . Den elastiske skjærstivheten benyttes til å styre oppførselen ved små tøyninger og ved av- og rebelastning. Den initiale skjærmobiliseringen kan være gitt av den faktiske initiale maksimale skjærspenningen, under forutsetning av vertikal sedimentasjon på horisontal grunn, gitt ved  $\tau_0 = (\sigma_{v0} - \sigma_{h0})/2$ , eller brukt som en ekstra tilpasningsparameter av spenningstøyningskurvene.

Tabell 2.1 Eksempel på input parametre til NGI-ADPSOft

$G_{ur}/s_u^A$	$s_u^{DSS}/s_u^A$	$s_u^P/s_u^A$	$s_{u_r}^A/s_u^A$	$s_{u_r}^{DSS}/s_u^A$	$s_{u_r}^P/s_u^A$	$\gamma_p^C$	$\gamma_p^{DSS}$	$\gamma_p^E$	$\gamma_r^C$	$\gamma_r^{DSS}$	$\gamma_r^E$	$\tau_0/s_u^A$
500	0.67	0.5	0.5	0.5	0.5	1%	5%	10%	20%	20%	20%	0.0



Figur 2.1 Simulering av isotropt konsoliderte plantøyningsforsøk – presentert i normalisert deviatorisk spenningsplott for plantøyningstilstand  $(\sigma_y - \sigma_x)/2$  mot  $\tau_{xy}$  og i plott med skjærspenning mot skjærtøyning

## 2.2 Softening-kurver

NGI-ADPSoft har i løpet av prosjektet blitt forbedret når det gjelder formen på softening-kurven. Ulempen med den originale softeningkurven benyttet i NGI-

ANISOFT (Andresen, 2002) er at kurven gir for langt platå før softening starter ved input av en stor skjærtøyning ved nådd residualtøyning. I tillegg er modellen forbedret med tanke på problemer knyttet til tap av konveksitet til flyteflaten ved noen uheldige kombinasjoner av ”peak” og residualtøyninger. Dette er beskrevet mer i detalj i Vedlegg A.

### 2.3 Ikke-lokal tøyning

Ideen med såkalt ”ikke-lokal tøyning” er at det plastiske tøyningssinkrementet i et materialpunkt er erstattet med en ”ikke-lokal tøyning” hvor tøyningssinkrementene i et brukerstyrt område rundt det aktuelle punktet er vektet inn. Det betyr at den permanente tøyningen er bestemt av deformasjonen innen et bestemt område i stede for å være avhengig av elementstørrelsen. Denne vektingen er typisk gjort med en *Gauss* funksjon. En variant av denne vektingen er kalt ”utvidet ikke-lokal tøyning” (Brinkreve, 1994). Det ”ikke-lokale” tøyningssinkrementet i et materialpunkt blir da beregnet i henhold til ligning (1).

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{p*}(\mathbf{x}_i) = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}_i) - \alpha \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}_i) + \frac{\alpha}{V} \int (w(\mathbf{x}) \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x})) dV \quad (1)$$

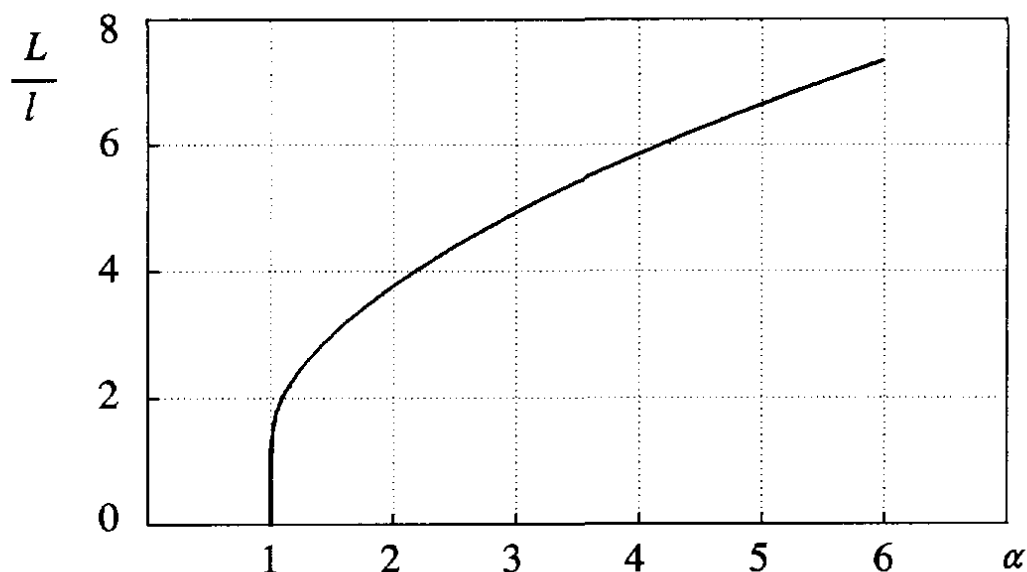
hvor  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x})$  er det plastiske tøyningssinkrementet i materialpunktet med posisjon  $\mathbf{x}$  ( $x, y, z$ );  $\alpha$  er en parameter som settes større enn 1.0 (hvor  $\alpha = 2.0$  anbefales i Jostad & Grimstad (2011); vektingsfunksjonen (Gauss funksjonen):

$$w(\mathbf{x}) = \frac{1}{l\sqrt{\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{l^2}\right)$$

$\mathbf{x}_i$  er en varierende posisjon rundt  $\mathbf{x}$  og  $l$  er en gitt lengde (”indre lengde”). Merk at  $l$  ikke må forveksles med skjærbåndtykkelsen  $L$ . Avhengig av valg for  $\alpha$  er skjærbåndtykkelsen gitt i Figur 2.2. For  $\alpha = 1.58$  er  $L/l \approx 3.14$  ( $\pi$ ). Se også ligning (2) eller (3) under. Løsningen for  $\alpha = 1$  er udefinert.

$$\frac{L}{l} = \frac{\pi}{\sqrt{\ln(\alpha) - \ln(\alpha - 1)}} \quad (2)$$

$$\alpha = \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{\pi l}{L}\right)^2} \quad (3)$$



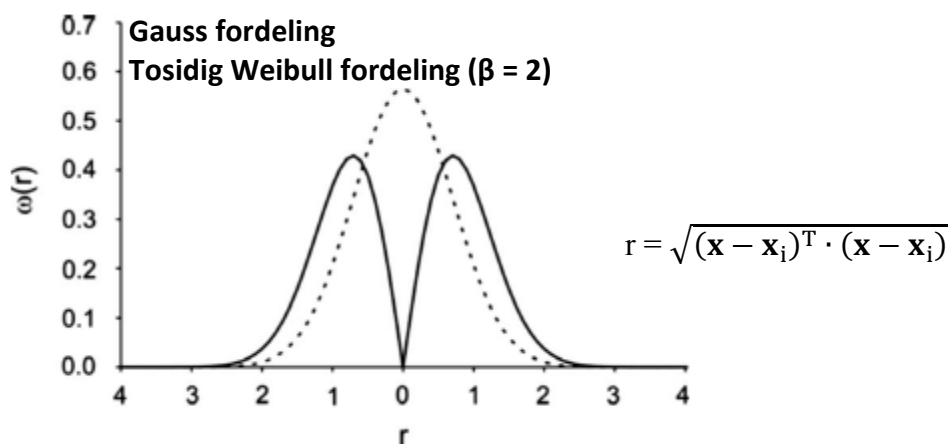
Figur 2.2 Normalisert skjærbåndtykkelse  $L/l$  mot  $\alpha$ , etter Brinkgreve (1994)

I praksis gjøres integrasjonen av det ”ikke-lokale” plastiske tøyningsinkrementet numerisk ved å summere over alle integrasjonspunktene i elementnettet (eller et begrenset område gitt av  $l$ ).

En annen variant av det ”ikke-lokale” plastiske tøyningsinkrementet er foreslått av Galavi og Schweiger (2010). Ligning (4) gir en alternativ vektingsfunksjon, som egentlig er en tosidig *Weibull* fordeling. Figur 2.3 viser begge vektingsfunksjonene for  $l = 1$ .

$$w^*(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)^T \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)}}{l^2} \cdot \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)^T \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)}{l^2}\right) \quad (4)$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{p*}(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{V} \int (w(\mathbf{x}) \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x})) dV$$



Figur 2.3 To alternative vektingsfunksjoner for "ikke-lokal" tøyning med  $l = 1$  (Galavi og Schweiger, 2010)

## 2.4 Implementering av modellen i Plaxis

Modellen er implementert med en implisitt formulering. Det betyr at det er informasjonen ved slutten av et inkrement som benyttes til å bestemme den plastiske oppførselen for det aktuelle inkrementet. Siden tilstanden ved slutten av et inkrement ikke er kjent på forhånd, benyttes en Newton-Raphson iterasjonsprosedyre for å finne tilstandsparametrene ved endt inkrement. En slik prosedyre kan for eksempel finnes i de Borst og Heeres (2002). Den "ikke-lokale" tøyningen i ett integrasjonspunkt beregnes ved å summere bidragene fra alle nærliggende integrasjonspunkt innenfor en radius på  $3l$ . Grunnen til at avstanden er begrenset til  $3l$  kan sees i Figur 2.3, hvor  $w$  er meget liten for  $r > 3l$ . Beregningstiden blir dermed betydelig redusert i forhold til å inkludere alle integrasjonspunktene i hele FE modellen.

## 3 Brukerveiledning

Modellen beskrevet foran kan benyttes i forbindelse med Plaxis 2D analyser. Kopier ADPSoft.DLL filen (som inneholder materialmodellen) til Plaxis programmappen (hvor plaxis programmet ligger) sammen med filen DFORRT.DLL. Programmet PLAXIS 2D v9.02 kan da åpnes og et nytt prosjekt defineres. Det anbefales foreløpig å begrense navnet på prosjektet til 8 tegn. Merk også at i nåværende versjon av ADPSoft. DLL datert 2011-09-16 er antall integrasjonspunkt i modellen begrenset til 240 000 (hvilket for 15 noders elementer medfører at antall elementer er begrenset til 20000). En annen begrensning er at det kun kan benyttes opptil 5000 integrasjonspunkt innenfor en radius på  $3l$ .

### 3.1 Input

Når et materiale med softening skal beskrives i en elementmodell velges først ”user-defined” materiale, deretter velges NGI-ADP-Soft-nls fra adpsoft.DLL. Et vindu som vist i Figur 3.1 blir dermed åpnet. Totalt 28 parametere kreves som input til modellen. En beskrivelse av parametrene med kommentarer til valg av verdier er gitt i Tabell 3.1. Merk at for flere av parameterne kan ”standard” verdier benyttes.

De første parametrene er de samme som finnes i NGI-ADP modellen (NGI, 2008 og Grimstad et al., 2011). Disse parametrene benyttes til å beskrive skjærspenning-skjærtøyningkurven til materialet (vist i Figur 2.1 og beskrevet i seksjon 2.1) opp til ”peak” styrkene.

I Figur 3.1 er  $s_u^A$  satt til 1.0. For et generelt tilfelle skal denne være gitt av  $s_u^A$  profilet. Det betyr at skjærstyrkeprofilet/fordelingen styres av  $s_u^A$  fordelingen.

Softeningkurvene, for de tre karakteristiske tøyingsretningene, er gitt av forholdene mellom residual skjærstyrkene,  $s_{u_r}^A$ ,  $s_{u_r}^{DSS}$ ,  $s_{u_r}^P$  og ”peak” aktiv udrenert skjærstyrke  $s_u^A$  og treaks tøyningene ved oppnådd residual styrke  $\gamma_r^C$ ,  $\gamma_r^{DSS}$  og  $\gamma_r^E$  (se Figur 2.1 i seksjon 2.1). I tillegg styres formen på kurven av parametrene  $c_1$  og  $c_2$  (se Figur A1.1). Merk at  $c_1$  må være større enn 1.0 og at  $c_2$  må være lik eller mindre enn  $c_1$ . Generelt anbefales det å benytte  $c_2$  lik  $c_1$ . Lineær softening etter ”peak” oppnås med  $c_1 = 1.0$  og  $c_2 = 0$ . For meget sensitive leirer er det ikke mulig å etablere hele softeningkurven ved hjelp av standard tester, tøyningen ved residual styrken er mye større enn det som kan oppnås i disse testene. Modelltester eller mer spesielle tester vil da være nødvendig for å etablere denne kurven.

Modellen kan også benyttes i en forenklet drenert analyse ved å spesifisere en drenert tverrkonsentrasjonstall  $v$  mindre enn 0.495. Men generelt benyttes den i en udrenert analyse med  $v_u = 0.495$ .

Den ”ikke-lokale tøyningen” er styrt av  $\alpha$  og  $l_{int}$ , hvor det normalt anbefales å benytte  $\alpha = 2.0$  (Jostad og Grimstad, 2011).  $l_{int}$  velges typisk lik elementstørrelsen (karakteristisk lengde på elementene) i området hvor det forventes å få softening.

I noen tilfeller kan det være ønskelig å undersøke effekten av en skjærbåndtykkelse som er mindre enn den karakteristiske elementstørrelsen. Dette kan da gjøres ved å skalere softeningkurven. Skaleringparameteren  $(1-l^*/l_{int})$  kan benyttes i en slik skalering, hvor 0 er standardverdi som gir ingen skalering. Normalt bør en være forsiktig med å velge for stor verdi på denne parameteren. I materialmodellen benyttes  $l^*$  til å skalere residual tøyningen:

$$\gamma_r^{p*} = (\gamma_r^p - \gamma_p^p) \cdot \frac{l^*}{l_{int}} + \gamma_r^p \quad (0)$$

For å forbedre interpoleringen mellom ”peak” og residual tøyningene for en generell tøyingsretning, er det lagt inn 3 alternative interpolasjonsfunksjoner (se Vedlegg A). Generelt anbefales det å benytte interpolasjonstype INT. TYPE = 1.

For beregning av den ”ikke-lokale” tøyningen er det mulig å velge mellom eksakt løsning (GS pl/tot = 0), se ligning (1), eller en tilnærmet løsning hvor det plastiske tøyningensinkrementet antas lik det totale tøyningensinkrementet (GS pl/tot = 1). For et generelt tilfelle, med flere iterasjoner for å oppnå likevekt anbefales det å benytte GS pl/tot = 0. Det er kun i spesielle tilfeller det kan være hensiktsmessig å benytte en tilnærmet løsning. Dette er for eksempel diskutert i Grimstad et al. (2010).

Tabell 3.1 Input for NGI-ADPSoft med ”ikke-lokal tøyning”

Param.	Benevn.	Beskrivelse	Kommentar
$G_{ur}/s_u^A$	-	Normalisert elastisk (initieell) skjærmodul dividert på udrenert aktiv (plantøyning) ”peak” skjærstyrke	Normalt benyttes en initiell stivhet som er noe mindre enn $G_{max}$ . Verdien er normalt mellom 100 og 1500, med en typisk verdi på 500. Verdien benyttes til å kontrollere stivheten ved små tøyninger og avlastningsstivheten
$s_{u,ref}^A$	kPa	Udrenert aktiv ”peak” skjærstyrke ved $y_{ref}$	
$s_{u,inc}^A$	kPa/m	Lineær endring i $s_u^A$ fra $y_{ref}$ mot dybden	Positiv verdi ved økning i styrken mot dybden
$x_{ref}$	m	Horisontal posisjon for $y_{ref}$	
$y_{ref}$	m	Referansedybde for endring av udrenert skjærstyrke	Se også $x_{ref}$ og $\Delta y_{ref}/\Delta x$ (basert på koordinatsystemet som benyttes i Plaxis modellen)
$\Delta y_{ref}/\Delta x$	-	Endring i $y_{ref}$ som funksjon av $x$ fra $x_{ref}$	Basert på koordinatsystemet som benyttes i Plaxis modellen
$s_u^{DSS}/s_u^A$	-	Normalisert udrenert DSS ”peak” skjærstyrke	Typisk: $s_u^P/s_u^A < s_u^{DSS}/s_u^A < 1.0$
$s_u^P/s_u^A$	-	Normalisert udrenert passiv ”peak” skjærstyrke	
$\tau_0/s_u^A$	-	Initial skjærmobilisering	For NC leire: $\tau_0 = (1-K_0)\sigma_{y0}'/2$
$s_{u,r}^A/s_u^A$	-	Normalisert udrenert aktiv residual skjærstyrke	$\leq 1.0$
$s_{u,r}^{DSS}/s_u^A$	-	Normalisert udrenert DSS residual skjærstyrke	$\leq s_u^{DSS}/s_u^A$
$s_{u,r}^P/s_u^A$	-	Normalisert udrenert passiv residual skjærstyrke	$\leq s_u^P/s_u^A$ ( $s_{u,r}^A/s_u^A = 1.0$ , $s_{u,r}^{DSS}/s_u^A = s_u^{DSS}/s_u^A$ og $s_{u,r}^P/s_u^A = s_u^P/s_u^A \rightarrow$ NGI-ADP uten ”softening”)
$\gamma_p^C$	%	Skjærtøyning ved ”peak” udrenert treaks trykkstyrke, $s_u^A$	
$\gamma_p^{DSS}$	%	Skjærtøyning ved ”peak” udrenert DSS styrke, $s_u^{DSS}$	



Param.	Benevn.	Beskrivelse	Kommentar
$\gamma_p^{DSS}$	%	Skjærtøyning ved "peak" udrenert DSS styrke, $s_u^{DSS}$	
$\gamma_p^E$	%	Skjærtøyning ved "peak" udrenert treaks strekkstyrke, $s_u^P$	
$\gamma_r^C$	%	Skjærtøyning ved residual udrenert treaks trykkstyrke, $s_u^A_r$	$> \gamma_p^C$
$\gamma_r^{DSS}$	%	Skjærtøyning ved residual udrenert DSS styrke, $s_u^{DSS}_r$	$> \gamma_p^{DSS}$
$\gamma_r^E$	%	Skjærtøyning ved residual udrenert treaks strekkstyrke, $s_u^P_r$	$> \gamma_p^E$ (ofte $\gamma_r^C = \gamma_r^{DSS} = \gamma_r^E$ )
$c_1$	-	Softeningparameter 1	$> 1.0$
$c_2$	-	Softeningparameter 2	$\leq c_1$ ( $c_1 = c_2$ anbefales)
$v$	-	Drenert tverrkontraksjonstall	$= 0$ til $0.495$ ( $0.495$ gir udrenert på totalspenningsbasis)
$v_u$	-	Udrenert tverrkontraksjonstall	$= 0.495$
$\alpha$	-	Parameter for "ikke-lokal tøyning" $\alpha = 1.58 \rightarrow$ Tykkelse av skjærbånd i $1D \approx \pi \cdot l_{int}$ $\alpha = 1$ "vanlig" ikke-lokal tøyning med Gauss fordeling, etter Eringen (1981) $\alpha = 0 \rightarrow$ ikke-lokal tøyning skrues av $\alpha = -1 \rightarrow$ tosidig Weibull fordeling etter Galavi og Schweiger (2010)	$\alpha = 2$ anbefales (Jostad og Grimstad 2011) $\alpha = 1.58 \rightarrow$ Tykkelse av skjærbånd i $1D \approx \pi \cdot l_{int}$ $\alpha = 1$ "vanlig" ikke-lokal tøyning med Gauss fordeling, etter Eringen (1981) $\alpha = 0 \rightarrow$ ikke-lokal tøyning skrues av $\alpha = -1 \rightarrow$ tosidig Weibull fordeling etter Galavi og Schweiger (2010)
$l_{int}$	m	Intern lengde	Typisk lik elementstørrelsen
$1-l^*/l$	-	Skaleringsparameter $\gamma_r^{p*} = (\gamma_r^p - \gamma_p^p) \cdot \frac{l^*}{l} + \gamma_p^p$	Hvis skalering ikke er ønsket benyttes $(1-l^*/l_{int}) = 0$ (Default)
INT. TYPE	-	1 (anbefales), 2 eller 3 for ulik valg av interpolasjon av peak/residual tøyninger (se vedlegg A)	
GS pl/tot	-	Plastisk (= 0; anbefales) eller total tøyning (= 1) som input i Galavi og Schweiger sin ikke-lokale tøyningformulering	
Debug	-	Skriver diverse info til usrdbg.txt for et "tilfeldig" integrasjonspunkt	

User-defined model - adp-soft-alpha=0

General Parameters Interfaces

Available DLL's : adpsoft.dll Models in DLL: ID 1 : NGI-ADP-Soft-nl

Parameter	Name	Unit	Value
1	$G_{ur}/s_u^A$	-	500,000
2	$s_{u\ ref}^A$	MN/m <sup>2</sup>	1,000
3	$s_{u\ inc}^A$	MN/m <sup>2</sup> /m	0,000
4	$x_{ref}$	m	0,000
5	$y_{ref}$	m	0,000
6	$\Delta y_{ref}/\Delta x$	-	0,000
7	$s_u^{DSS}/s_u^A$	-	0,670

SoilTest Next OK Cancel

Figur 3.1 Input for NGI-ADPSoft med "ikke-lokal" tøyning (bare de 7 første parametrene er vist)

### 3.2 Beregninger

Siden en koblingsmatrise av integrasjonspunkter (integrasjonspunkter innen en radius på  $3 \cdot l_{int}$  for hvert integrasjonspunkt) må initialiseres kan oppstartstiden ved hver fase oppfattes som lang. Koblingsmatrisen lagres i en binærfil i Plaxis prosjektmappen for analysen. Koblingsmatrisen (den binære fila) oppdateres mellom hver beregningsfase. Dette gjøres for å kunne ta hensyn til endring av geometri (for eksempel ved utgravninger etc.). Siden matrisen leses inn i hver iterasjon er det mest effektivt (med hensyn på regnetid) å regne lokalt på harddisken på maskinen som brukes, i stedet for på en server.

I Tabell 3.2 vises en oversikt over mulige beregningsalternativer for NGI-ADPSoft modellen. Merk at "(v)" betyr at det skal være mulig å utføre en slik beregning, men at modellen ikke er ment brukt til dette formålet.

Tabell 3.2 Beregningsalternativer

	Ja	Nei	Ikke aktuelt
Plastisk analyse "Plastic analysis"	v		
Konsolidering "Consolidation"	(v)		V
"Phi/c reduction"		v	V
Dynamisk analyse "Dynamic analysis"	(v)		V
Store forskyvinger ("Update mesh")	v		
"Stage construction"	v		
"Total multipliers""Stage construction"	v		
"Incremental multipliers""Total multipliers"	v		
"Incremental multipliers"	v		

### 3.3 Resultater

I programmet PLAXIS *Output* er det i tillegg til vanlig funksjonalitet en mulighet til å vise konturplott av tilstandsparametere. Disse finnes under *Stresses and State Variables*. Tabell 3.3 gir en oversikt over tilstandsparametere for NGI-ADPSoft modellen med "ikke-lokal" tøyning.

Tabell 3.3 Tilstandsparametre for output

StVar	Navn	Beskrivelse
Variable parametere		
1	$\gamma_p$	plastisk skjærtøyning
2	$\kappa_1$	"hardening" parameter (= 1 ved og etter full mobilisering av "peak" skjærstyrke, initielt = 0)
3	$\kappa_2$	"softening" parameter (= 0 ved "peak" og = 1 ved "residual")
Konstante parametere		
4	$s_u^A$	Udrenert aktiv "peak" skjærstyrke
5	$G_{ur}$	Av og re-belastningsskjærmodul
6	$\tau_0$	Initial skjærspenning uten plastiske tøyninger
Andre		
7-10	Hjelpeparametere / ikke i bruk	

## 4 Eksempler

### 4.1 Skjærkolonne

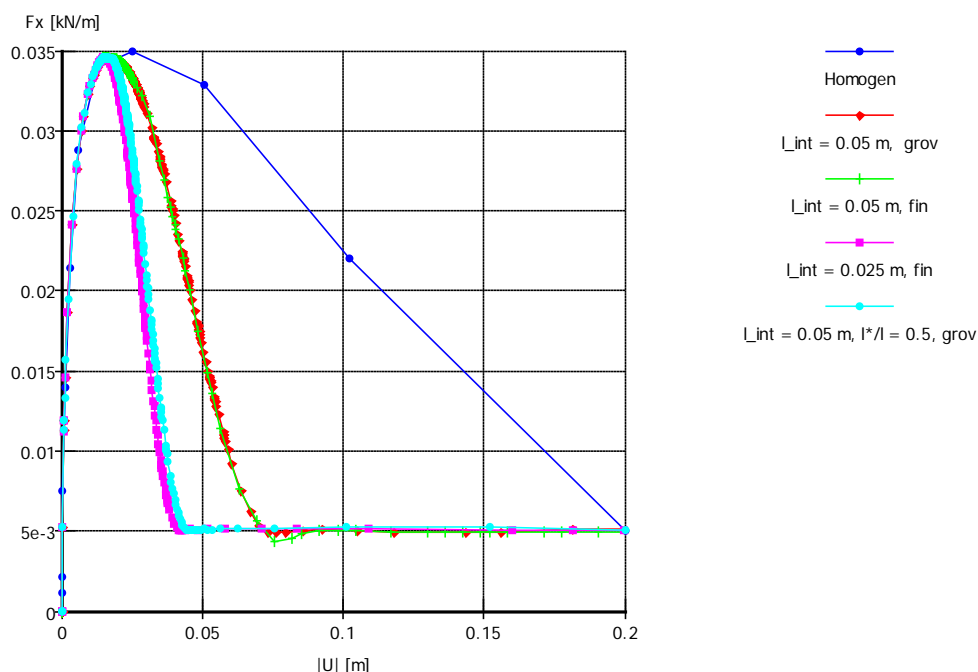
En idealisert "1D" skjærkolonne med høyde 1 m og bredde 0.01 m er simulert. Lokalisert skjærbrudd er oppnådd ved å inkludere et svakt element ( $s_u^A$  er redusert med 1%) nær midt i kolonnen. Seks-knutepunkts trekantelementer er brukt. Materialparametere er gitt i Tabell 4.1. I tillegg er  $\alpha = -1$  (Galavi & Schweiger),

$c_1 = c_2 = 2.3836$  ( $l_{int} = 0.1$  og  $0.05$  m, og  $(1-l^*/l_{int}) = 0$  (uten skalering av softeningkurven) og  $0.5$  (halvering av skjærsonen ved å skalere softeningkurven) brukt i de ulike analysene. To ulike nett er brukt: Grov (44 elementer) og Fin (184 elementer), begge med to elementer over bredden. Figur 4.1 viser at man får samme resultat (nettuavhengige resultat) med de to nettene. Grimstad et al. (2010) har vist at dette også er tilfelle for "ikke-lokal tøyning" ( $\alpha = 1.58$ ). Magentarød og cyanblå kurvene viser at ved å skalere softeningkurven,  $(1-l^*/l_{int}) = 0.5$ , så kan man i 1D oppnå nesten samme resultat med et grovt nett og en for stor indre lengde (for stor skjærbåndtykkelse) som med et fint nett og ønsket indre lengde (skjærbåndtykkelse). Merk at disse simuleringene var utført med veldig liten global toleranse (manuell endring av løsningsalgoritme data) for å sikre at lokalisert skjærbrudd skjer ved "peak" last.

Tabell 4.1 Jordparametere for NGI-ADPsoft modellen "skjærkolonne"

$G_{ur}/s_u^A$	$s_u^{DSS}/s_u^A$	$s_u^P/s_u^A$	$s_u^A/s_u^A$	$s_u^{DSS}/s_u^A$	$s_u^P/s_u^A$	$\gamma_0^C$	$\gamma_p^{DSS}$	$\gamma_p^E$	$\gamma_{rf}^C$	$\gamma_r^{DSS}$	$\gamma_r^E$	$\tau_0/s_u^A$
500	0.7	0.4	0.1	0.1	0.1	1.5%	2%	4.5%	20%	20%	20%	0.7

For øvrig vises det til Jostad og Grimstad (2011) (Vedlegg C) for mer detaljer ved simulering av ulike metoder for en skjærkolonne.



Figur 4.1 Last-forskyvningskurver for "skjærkolonne" med ulike indre lengder og skalering av softeningkurven

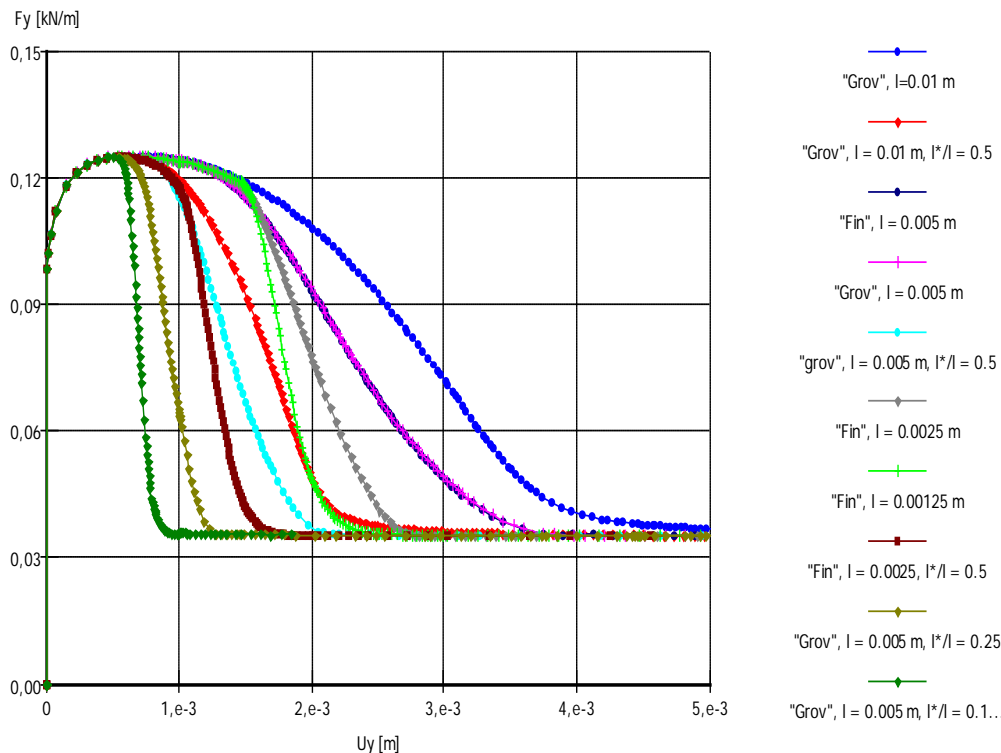
## 4.2 Biax (udrenert plantøyning kompresjonstest)

En plantøyning kompresjonstest (biax) er simulert. Høyden av biaxen er 0.1 m og bredden er 0.05 m. Parameterne som er brukt i simuleringene er gitt i Tabell 4.2 i tillegg er  $l_{int} = 0.01, 0.005, 0.0025$  og  $0.00125$  m og  $\alpha = -1$  (Galavi & Schweigher) brukt som input. Lokalisering i biaxen er oppnådd ved hjelp av helt røe ("fixed") endeflater.

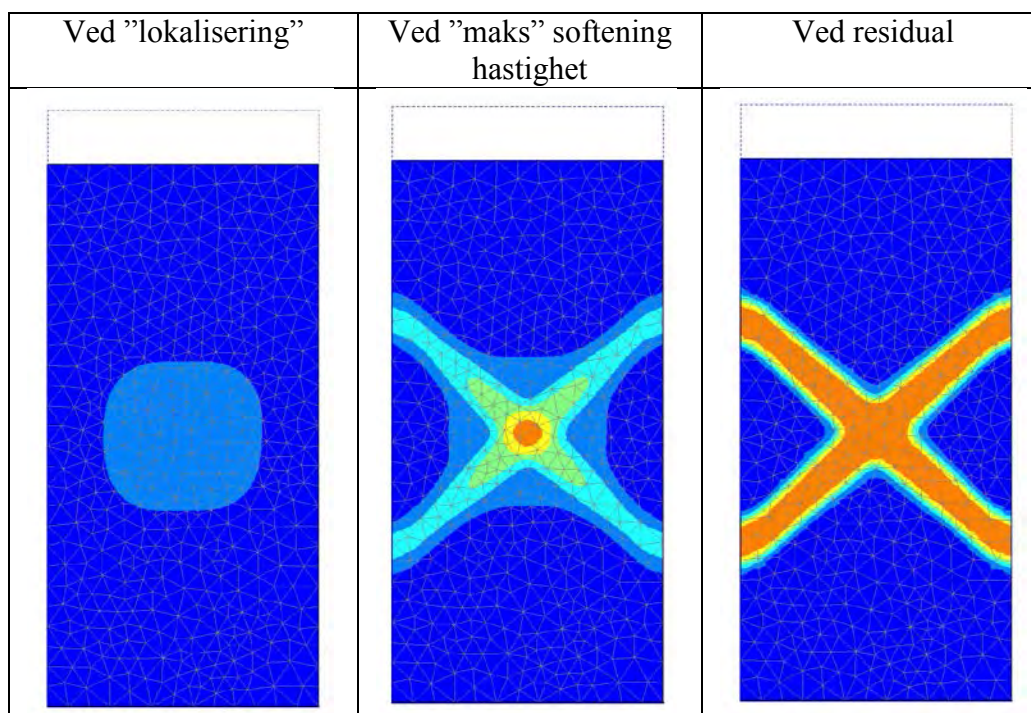
Tabell 4.2 Jordparametere for NGI-ADPsoft modellen i biax simuleringene

$G_{ur}/s_u^A$	$s_u^{DSS}/s_u^A$	$s_u^P/s_u^A$	$s_{u,r}^A/s_u^A$	$s_u^{DSS,r}/s_u^A$	$s_{u,r}^P/s_u^A$	$\gamma_p^C$	$\gamma_p^{DSS}$	$\gamma_p^E$	$\gamma_{rf}^C$	$\gamma_r^{DSS}$	$\gamma_r^E$	$\tau_0/s_u^A$
500	0.7	0.4	0.1	0.1	0.1	1.5%	2%	4.5%	20%	20%	20%	0.7

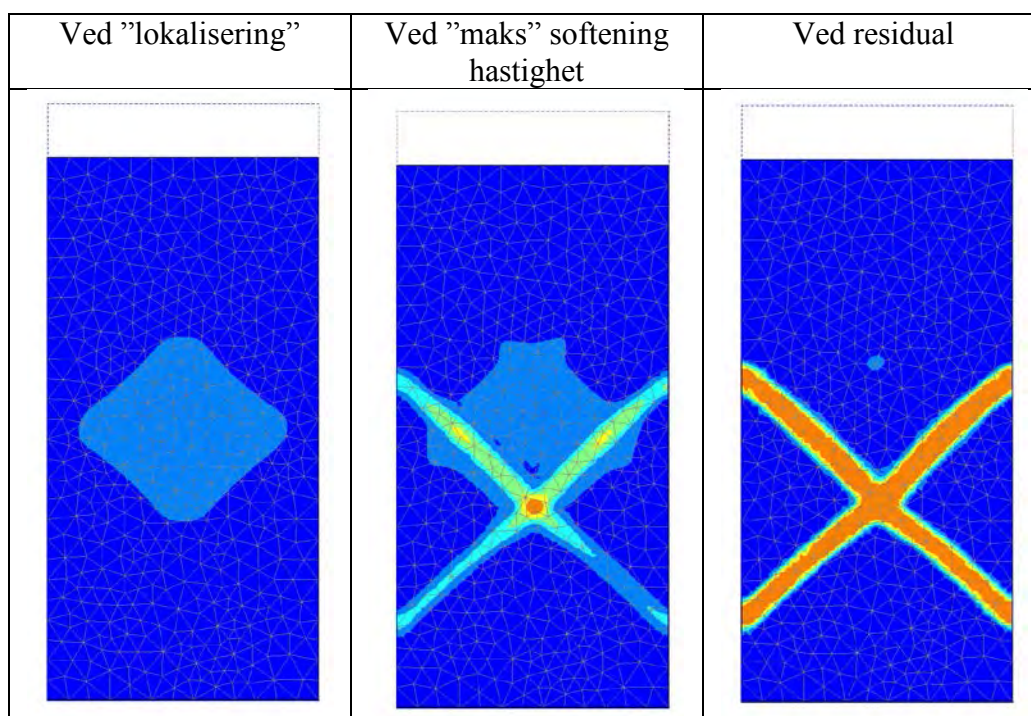
Resultatene i Figur 4.2 viser at helningen av den globale softeningkurven (last mot forskyvning), som er styrt av tykkelse på skjærbåndet. Denne tykkelsen kontrolleres ved å endre den indre lengden og indirekte ved å skalere softeningkurven. Men man oppnår ikke samme oppførsel ved passering av "peak" ved de to forskjellige metodene. Dette kan indikere at skalering ikke fungerer godt i dette området, eller at det er toleransen som ikke har vært streng nok og man har derfor tillatt en del softening uten at man har fått lokalisering i det man passerte "peak".



Figur 4.2 Last-forskyvningskurver for biax med forskjellige verdier for indre lengde og skaleringsparamter ( $1-l^*/l_{int}$ )



Figur 4.3 Konturer av  $\kappa_2$  for "fint" nett og  $l_{int} = 0.0025$  m (blå er lik 0 og rød er lik 1)



Figur 4.4 Konturer av  $\kappa_2$  for "fint" nett og  $l_{int} = 0.00125$  m (blå er lik 0 og rød er lik 1)

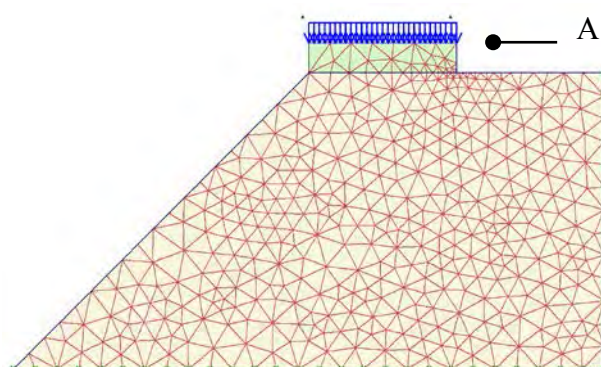
### 4.3 Enkel skråning

For å demonstrere effekten av "ikke-lokal tøyning" i et stabilitetsproblem er det samme eksemplet som finnes i Grimstad et al. (2010), da regnet med BIFURC, brukt som eksempel. Geometrien for det aktuelle problemet er definert i Figur 4.5. Problemet består av en 10 m høy enkel skråning med helning på 45° og med belastning på et 5 m bredt stivt fundament på toppen av skråningen. Antall elementer er 826 15 noders elementer som gir totalt 9912 integrasjonspunkt i modellen.

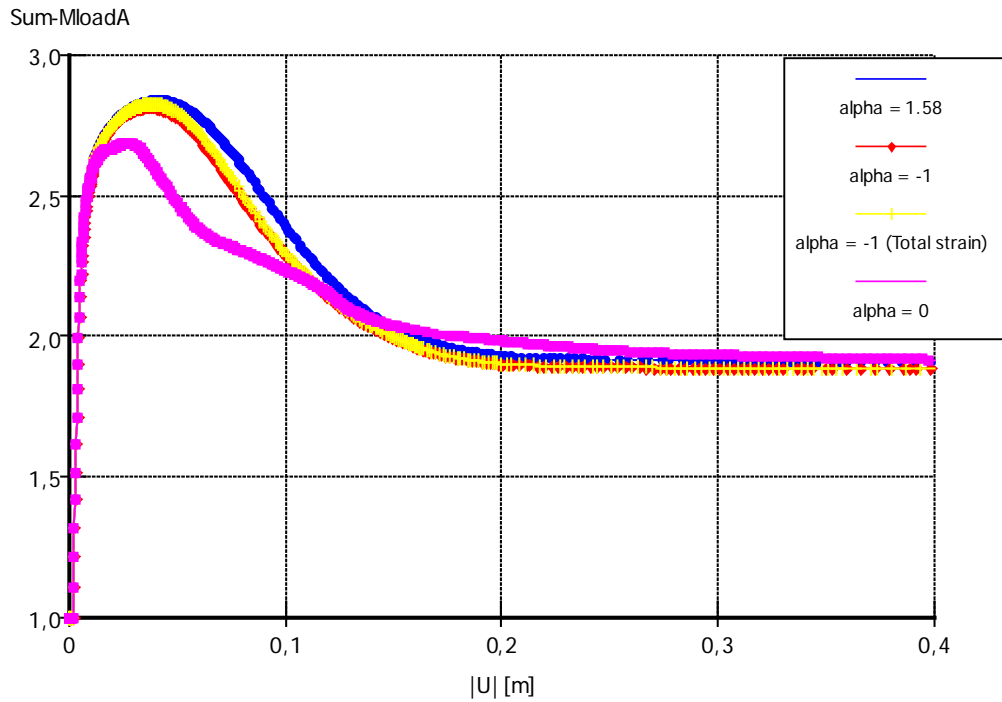
Tabell 4.3 Jordparametere for NGI-ADPsoft modellen for enkel skråning

$G_{ur}/s_u^A$	$s_u^{DSS}/s_u^A$	$s_u^P/s_u^A$	$s_u^A/s_u^A$	$s_u^{DSS}/s_u^A$	$s_u^P/s_u^A$	$\gamma_p^C$	$\gamma_p^{DSS}$	$\gamma_p^E$	$\gamma_{rf}^C$	$\gamma_r^{DSS}$	$\gamma_r^E$	$\tau_0/s_u^A$
500	0.67	0.5	0.5	0.5	0.5	1%	5%	10%	20%	20%	20%	0.25

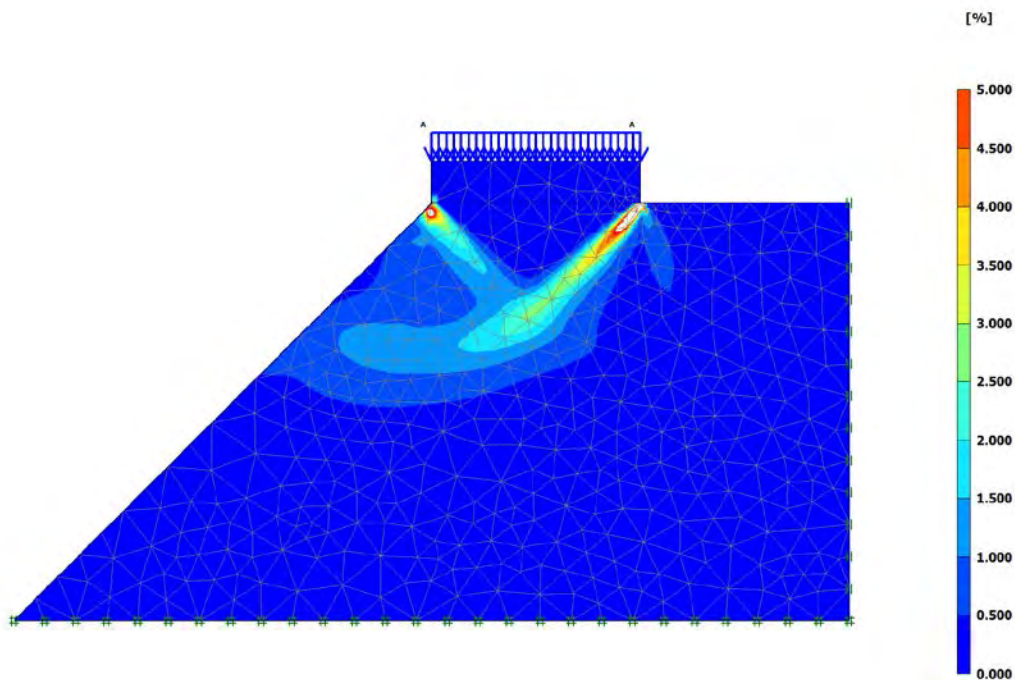
Problemet er analysert med 3 ulike verdier for  $\alpha$ , 1.58, 0 (ingen regularisering) og -1 (tosidig Weibull fordeling som beskrevet i Galavi og Schweiger (2010)). I tillegg er  $l_{int} = 0.2$  m brukt. Figur 4.6 gir normalisert last-forskyvningskurver ( $q/s_u^A$  mot  $\delta_v$ ) i punkt A i bakkant av fundamentet. De to regulariserte beregningene ender opp med en liten forskjell i maks last og residuallast som skyldes at effektiv skjærbåndtykkelse er litt forskjellig i de to tilfellene. Skjærbåndtykkelsen uten regularisering ( $\alpha = 0$ ) er gitt av elementnettet og er dermed mindre enn for de to analysene med regularisering. Resulterende konturplot av skjærtøyning,  $\epsilon_s$ , er gitt ved maks oppnådd last i Figur 4.7, Figur 4.8 og Figur 4.9 for de respektive input av  $\alpha$ . Forøvrig var beregningstiden for de to ulike regulariserte beregningene omtrent lik. Basert på dette kan man ikke gi en grunn til å velge den ene metoden framfor den andre. Figur 4.10 viser konturplot av "softeningparameteren"  $\kappa_2$  ved residuallast for  $\alpha = 0$  og  $\alpha = -1$ . Man kan se at bruddmekanismen (område med residual styrke) er forskjellig med regularisering og uten.



Figur 4.5 Elementmodell av en enkel skråning med et stivt fundament på toppen

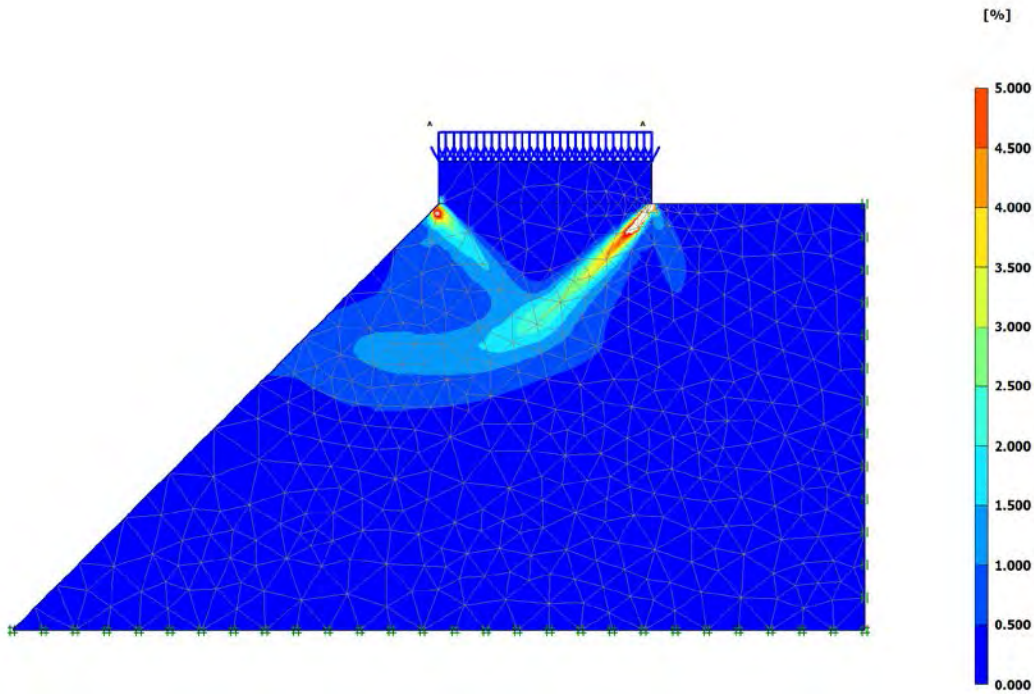


Figur 4.6 Normalisert last-forskyvningskurver,  $q/s_u^A$  mot  $\delta_A$ , for fundamentet med ulik input for  $\alpha$

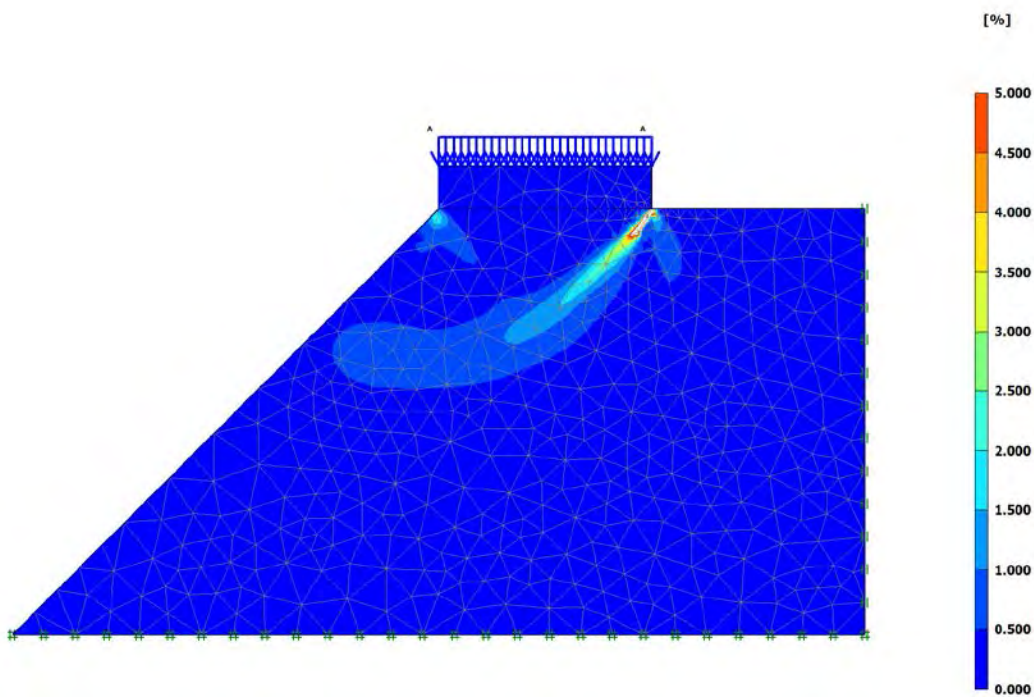


Figur 4.7 Skjærtøyning ved maks last med  $\alpha = 1.58$





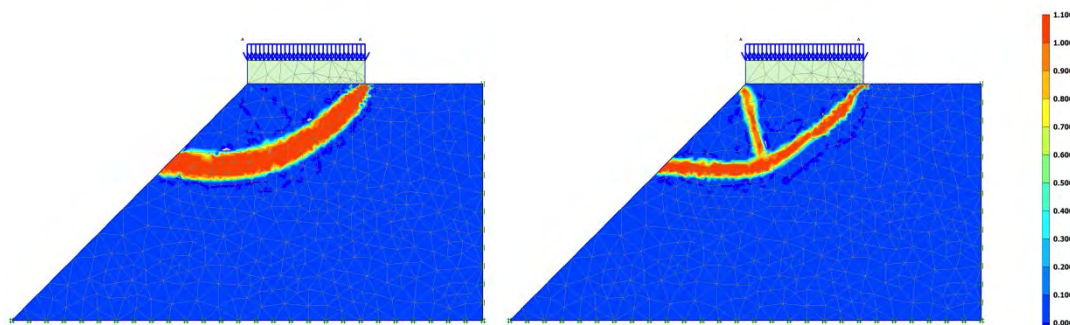
Figur 4.8 Skjærtøyning ved maks last med  $\alpha = -1$



Figur 4.9 Skjærtøyning ved maks last med  $\alpha = 0$

$\alpha = -1$  (Galavi og Schweiger, 2010)

$\alpha = 0$



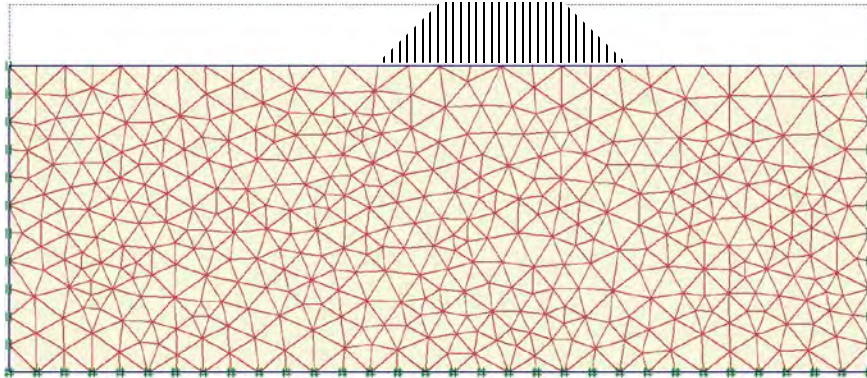
Figur 4.10 "Softening parameter",  $\kappa_2$ , ved residuallast (dvs. ved forskyvning på ca. 0.8 m) for  $\alpha = -1$  og for  $\alpha = 0$

#### 4.4 Bæreevne problem "uten" singulære punkt

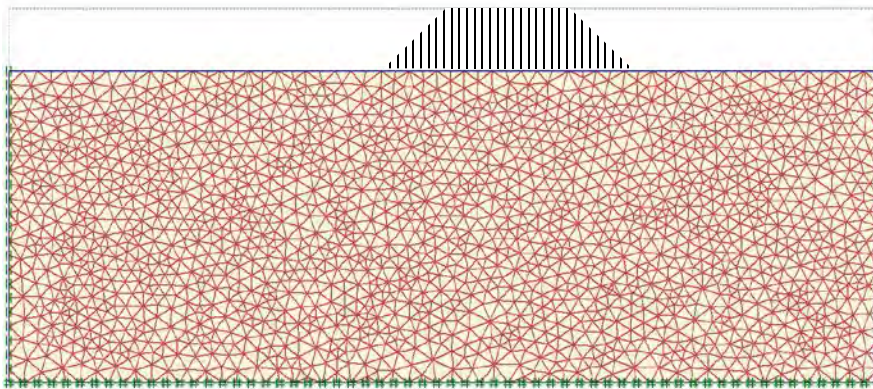
Bæreevneproblemet analysert i seksjon 4.3 har singulære punkt i ytterkantene av det stive fundamentet. Grimstad et al. (2010) demonstrerte at ved å regne på forskjellige elementnett med bruk av "ikke-lokal tøyning" så var ikke resultatene perfekt nettuavhengige. En hypotese er at dette skyldes problemer med å regularisere nær de singulære punktene. Derfor er også et bæreevneproblem uten disse singulære punktene analysert. I analysene er jordparametere fra Tabell 4.4 brukt. Dobbel Weibull fordelig ( $\alpha = -1$ ) er brukt i analysene. Initialspenningene er generert slik at man har initialt konstant vertikalspenning mot dybden og horisontalspenning slik at initial maksimal skjærspenning er lik med  $\tau_0$ . Figur 4.11 og Figur 4.12 viser det grove og det fine elementnettet brukt i analysene. Elementene som er brukt er 15 noders elementer. I Figur 4.13 kan man se det veldig fine nettet som er brukt i noen av analysene. Figur 4.14 viser normaliserte last-forskyvningskurver ( $q/s_u^A$  mot  $\delta_v$ ) for  $\alpha = 0$  (uten regularisering). Som forventet øker graden av "softening" med antall elementer. I Figur 4.15 kan man se at for det fine og det veldig fine nettet har man fått tilnærmet perfekte nettuavhengige last-forskyvningskurver, mens for det grove nettet har man fremdeles en liten diskretiseringsfeil. Dette betyr at  $l_{int} = 0.2$  m er tilstrekkelig stor for det fine nettet til å oppnå nettuavhengig resultat. Mens for det grove nettet er  $l_{int} = 0.2$  m litt for stor. På samme måte viser Figur 4.16 at  $l_{int} = 0.04$  m er for liten for det fine nettet. Man kan ikke konkludere mht det superfine nettet uten ytterligere forfining. Men konklusjonen er at uten singulære punkter vil man lettere kunne regularisere problemet med bruk av "ikke-lokal tøyning".

Tabell 4.4 Jordparametere for NGI-ADPsoft modellen benyttet i bæreevneproblemet

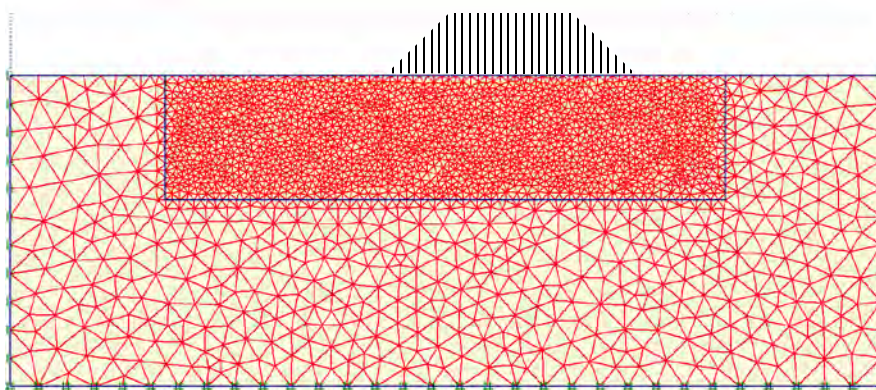
$G_{ur}/s_u^A$	$s_u^{DSS}/s_u^A$	$s_u^P/s_u^A$	$s_u^A/s_u^A$	$s_u^{DSS}/s_u^A$	$s_u^P/s_u^A$	$\gamma_p^C$	$\gamma_p^{DSS}$	$\gamma_p^E$	$\gamma_{rf}^C$	$\gamma_r^{DSS}$	$\gamma_r^E$	$\tau_0/s_u^A$
500	0.75	0.5	0.05	0.05	0.05	3%	3%	3%	75%	75%	75%	0.25



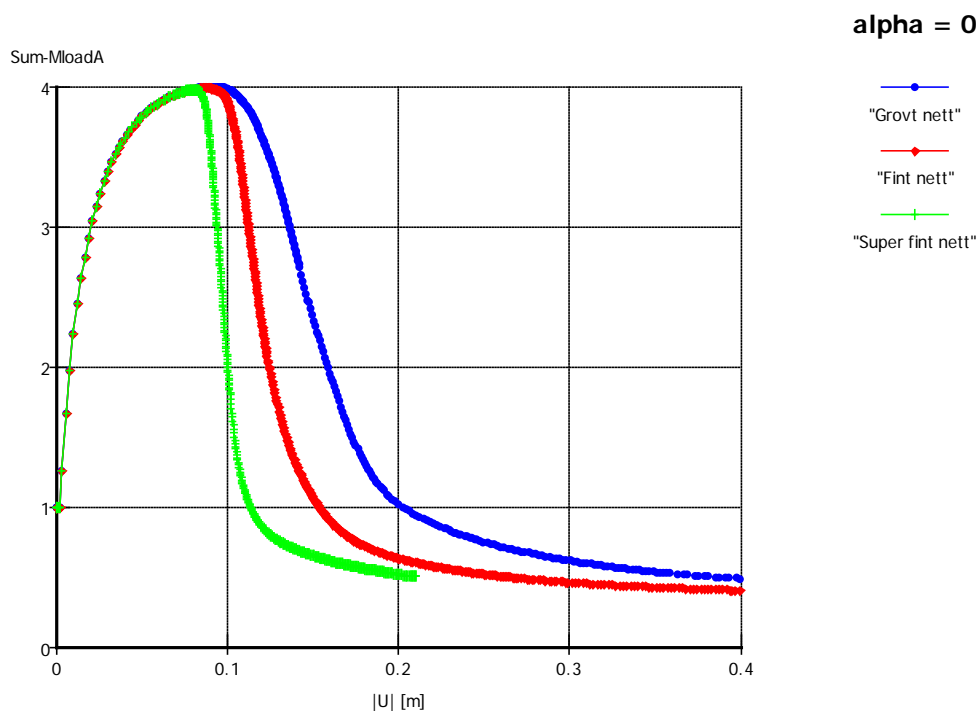
Figur 4.11 Grovt nett



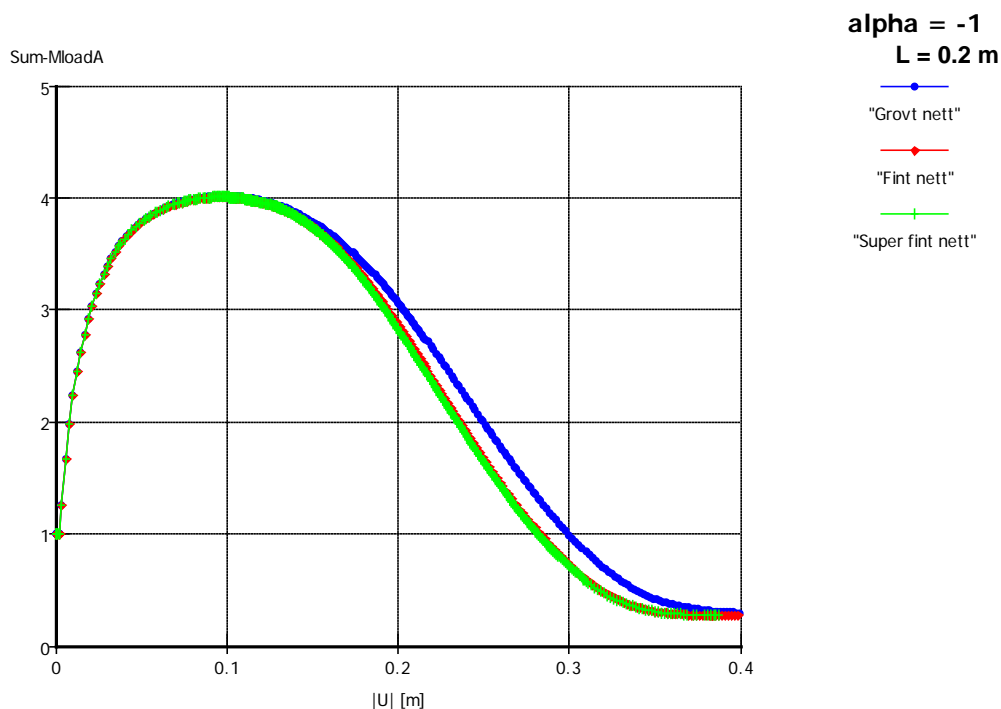
Figur 4.12 Fint nett



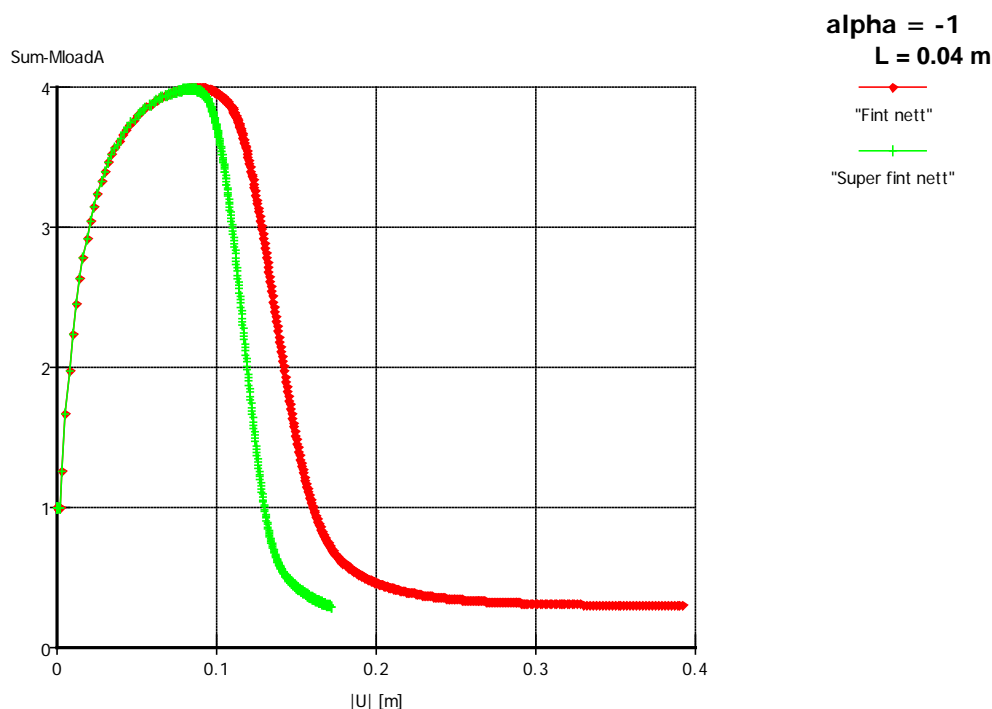
Figur 4.13 Veldig fint nett



Figur 4.14 Last-forskyvningskurver med forskjellig diskretisering, uten bruk av "ikke-lokal tøyning"



Figur 4.15 Last-forskyvningskurver med forskjellig diskretisering, med bruk av "ikke-lokal tøyning" ( $\alpha = -1$  og  $l_{int} = 0.2$  m)



Figur 4.16 Last forskyvningsplot med forskjellig diskretisering, med bruk av "ikke-lokal tøyning" ( $\alpha = -1$  og  $l_{int} = 0.04$  m)

## 5 Konklusjoner

Denne rapporten beskriver og demonstrerer bruken av NGI-ADPSOFT-modellen med "ikke-lokal tøyning" for beregning av udrenert bruddutvikling i sensitive leirer. En "ikke-lokal" tøyingsformulering er en enkel og effektiv måte å regularisere "softening"-oppførselen som er typisk for sensitive leirer. Regulariseringsmetoden benyttes til å kontrollere skjærbåndtykkelsen i "softening" sonen. For en antatt "effektiv" undrenert skjærbåndtykkelse kan man ved hjelp av denne modellen kunne regne på bruddproblemer ved bruk av Plaxis 2D, som inneholder både anisotropi i udrenert skjærstyrke og "softening", uten å få resultater som er sterkt påvirket av det valgte elementnettet. Dette forutsetter at elementnettet er tilstrekkelig fint for det aktuelle problemet. Effekten av å endre skjærbåndtykkelsen kan også enkelt undersøkes.

Men, følgende forutsetninger må tilfredstilles for at metoden skal være effektiv:

- En tilnærmet uniform materialoppførsel og skjærspenningsfordeling innenfor skjærbåndet.
- Den indre lengden er større eller tilnærmet lik elementstørrelsen innenfor den aktuelle bruddsonen

Jostad og Grimstad (2011) har vist at ”utvidet ikke-lokal” formulering er mest effektiv. Derfor anbefales  $\alpha > 1$  hvor  $\alpha = 2$  ser ut til å være mest optimalt. Det betyr at formuleringen fra Galavi og Schweiger (2010) i utgangspunktet ikke anbefales, da den hverken er mer robust eller mer effektiv.

Som delvis illustrert i denne rapporten og i Grimstad et al. (2010) så anbefales det at skalering av ”softeningkurven” brukes med forsiktighet og kun for å studere sensitiviteten av å redusere skjærbåndtykkelsen.

Effekten av tøyningshastighet og lokal drenasje må indirekte tas hensyn til ved valg av input parametere.

## 6 Referanser

Andresen, L. and Jostad, H.P. (2002), “A constitutive model for anisotropic and strain-softening clay” Numerical Models in Geomechanics - NUMOG VIII. Rome, Italy, pp. 79-84.

Bjerrum, L. (1973), “Problems of Soil Mechanics and Construction on Soft Clays, State of the Art Report to Session IV”, 8th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Moscow, pp. 111-159.

Brinkgreve, R.B.J (1994), Geomaterial Models and Numerical Analysis of Softening, PhD thesis, TU Delft, Delft, The Netherlands.

de Borst, R. and Heeres, O. M. (2002), “A unified approach to the implicit integration of standard, non-standard and viscous plasticity models”, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. 26, pp- 1059–1070.

Eringen, A.C. (1981), “On non-local plasticity”, Int. J. Eng. Science, 19, pp. 1461-1474.

Galavi, V. and Schweiger, H.F. (2010), “Nonlocal Multilaminate Model for Strain Softening Analysis” International Journal of Geomechanics, 10, pp. 30-44.

Grimstad, G., Andresen, L. and Jostad, H.P. (2011), “NGI ADP: Anisotropic Shear Strength Model for Clay”, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, DOI: 10.1002/nag.1016

Grimstad, G., Andresen, L. and Jostad, H.P. (2010), “Undrained capacity analyses of sensitive clays using the nonlocal strain approach”, 9th HSTAM International Congress on Mechanics, Limassol, Cyprus, 12 – 14 July, 2010

Gylland, A. (2009): ”Progressiv bruddutvikling i sensitive leire”.  
Geoteknikkdagen 27. november 2009

Hill, R. 1958. "A general theory of uniqueness and stability in elastic plastic solids", J. Mech. Phys. Solids, 6, pp. 236 -249.

Jostad, H.P., and Grimstad, G., 2011, "Comparison of distribution functions for the non-local strain approach", 2<sup>nd</sup> International Symposium on Computational Geomechanics (ComGeo II), Cavtat-Dubrovnik, Croatia, 27-29 April, 2011.

NGI (2008), Report No. 20081970-1, NGI-ADP Anisotropic shear strength model. 30 June 2008

Thakur, V. (2007): "Strain lokalization in sensitive soft clays".  
Ph.D. Thesis ved NTNU.

Vardoulakis, I, (1985), "Stability and bifurcation of undrained, plane rectilinear deformations on water-saturated granular soils", Int. J. Num. and Anal. Meth. In Geomech., 9, pp. 399-414.



# Vedlegg A - Matematisk formulering for NGI-ADPSOft

## Innhold

<b>A1 Flytekriterium</b>	<b>2</b>
<b>A2 Interpolasjon av karakteristiske plastiske tøyninger</b>	<b>4</b>



Nedenfor beskrives den matematiske formuleringen av NGI-ADPSOft-modellen.

## A1 Flytekriterium

$$F = \sqrt{H(\omega) \cdot \hat{J}_2} - \kappa_1 \cdot (1 - \kappa_2) \cdot \frac{s_u^A + s_u^P}{2} - \kappa_2 \cdot \frac{s_{ur}^A + s_{ur}^P}{2} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Hvor:

$$H(\omega) = \cos^2 \left( \frac{1}{6} \arccos(1 - 2a_1\omega) \right), \quad \omega = \frac{27}{4} \frac{\hat{J}_3^2}{\hat{J}_2^3}, \quad a_1 \rightarrow 1 \text{ gir eksakt Tresca}$$

$$\kappa_1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{\gamma^p / \gamma_p^p}}{1 + \gamma^p / \gamma_p^p} \text{ når } \gamma^p < \gamma_p^p \text{ ellers } \kappa_1 = 1, \quad (\text{A.2})$$

$$\kappa_2 = 0 \text{ når } \gamma^p \leq \gamma_p^p$$

$$\kappa_2 = \left( \frac{\gamma^p - \gamma_p^p}{\gamma_r^p - \gamma_p^p} \right)^{c_1} \cdot \left( 2 - \frac{\gamma^p - \gamma_p^p}{\gamma_r^p - \gamma_p^p} \right)^{c_2} \text{ når } \gamma_p^p < \gamma^p < \gamma_r^p \text{ ellers } \kappa_2 = 1 \quad (\text{A.3})$$

hvor  $\gamma^p$ ,  $\gamma_p^p$  og  $\gamma_r^p$  er plastisk skjærtøyninger, plastisk “peak” skjærtøyning og plastisk ”residual” skjærtøyning.  $\gamma_p^p$  and  $\gamma_r^p$  kan være avhengige av hovedspenningsretningene. Interpolasjonen for  $\gamma_p^p$  or  $\gamma_r^p$  som funksjon av spenning er gitt seinere. For  $c_1 = 1.0$  og  $c_2 = 0$  vil softeningkurven være lineær fra peak- til residual-skjærtøyning.

I den opprinnelige versjonen av NGI-ADPSOft så var  $\kappa_2$  definert som:

$$\kappa_2 = 0 \text{ når } \gamma^p \leq \gamma_p^p$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{2} \cdot \left( 1 - \cos \left( \pi \cdot \frac{\gamma^p - \gamma_p^p}{\gamma_r^p - \gamma_p^p} \right) \right) \text{ når } \gamma_p^p < \gamma^p < \gamma_r^p \text{ ellers } \kappa_2 = 1 \quad (\text{A.4})$$

For  $c_1 = c_2 = 2.3836394$  er  $\kappa_2$  forløpet tilnærmet identisk for de to formuleringene. Figur A1.1 viser spenning-tøyningsforløp for NGI-ADPSOft med ulike verdier av  $c_1$  og  $c_2$ .

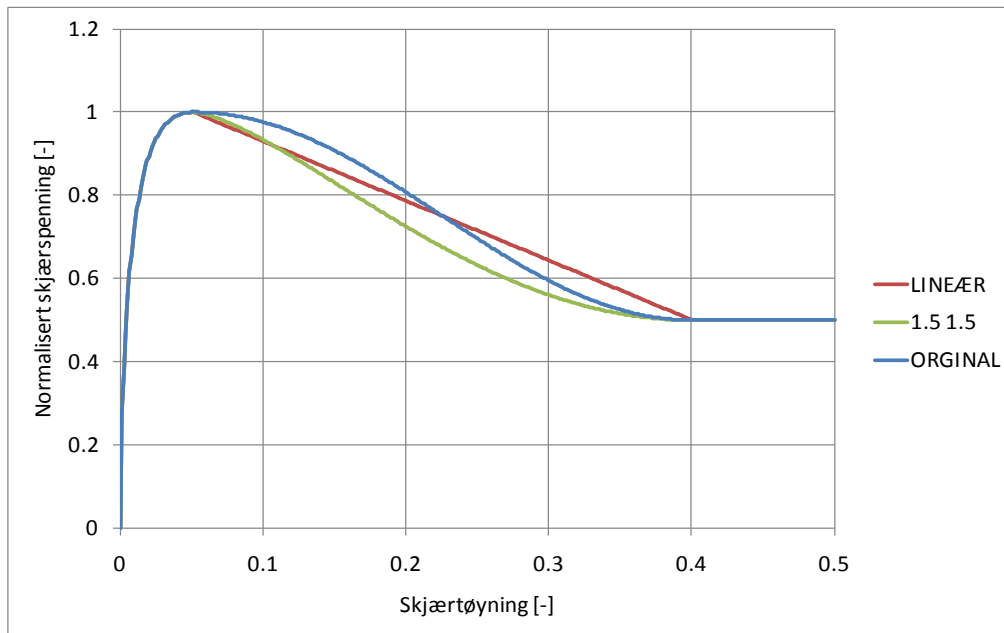


Figure A1.1 Spenning-tøyningsforløp for NGI-ADPSoft med  $c1 = c2 = 1.5$ , lineær ( $c1 = 1.0$  og  $c2 = 0$ ) og original softening funksjon ( $c1 = c2 = 2.3836394$ )

Invarianten  $\hat{J}_2$  er beregnet fra:

$$\hat{J}_2 = -\hat{s}_x \hat{s}_y - \hat{s}_x \hat{s}_z - \hat{s}_y \hat{s}_z + \hat{s}_{xy}^2 + \hat{s}_{xz}^2 + \hat{s}_{yz}^2 \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{bmatrix} \hat{s}_x \\ \hat{s}_y \\ \hat{s}_z \\ \hat{s}_{xy} \\ \hat{s}_{xz} \\ \hat{s}_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x - p + (1-\kappa_1) \cdot \frac{2}{3} \cdot \tau_0 + \kappa_1 \cdot (1-\kappa_2) \cdot \frac{1}{3} (s_u^A - s_u^P) + \kappa_2 \cdot \frac{1}{3} (s_{ur}^A - s_{ur}^P) \\ \sigma_y - p - (1-\kappa_1) \cdot \frac{4}{3} \cdot \tau_0 - \kappa_1 \cdot (1-\kappa_2) \cdot \frac{2}{3} (s_u^A - s_u^P) - \kappa_2 \cdot \frac{2}{3} (s_{ur}^A - s_{ur}^P) \\ \sigma_z - p + (1-\kappa_1) \cdot \frac{2}{3} \cdot \tau_0 + \kappa_1 \cdot (1-\kappa_2) \cdot \frac{1}{3} (s_u^A - s_u^P) + \kappa_2 \cdot \frac{1}{3} (s_{ur}^A - s_{ur}^P) \\ \tau_{xy} \cdot \left( \frac{s_u^A + s_u^P}{2 \cdot s_u^{DSS}} \cdot (1-\kappa_2) + \kappa_2 \cdot \frac{s_{ur}^A + s_{ur}^P}{2 \cdot s_{ur}^{DSS}} \right) \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \cdot \left( \frac{s_u^A + s_u^P}{2 \cdot s_u^{DSS}} \cdot (1-\kappa_2) + \kappa_2 \cdot \frac{s_{ur}^A + s_{ur}^P}{2 \cdot s_{ur}^{DSS}} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

hvor:

$s_u^{A,DSS,P}$  er den aktive, direkte “simple” skjær eller passiv udrenerte skjær-styrken i plan tøyning;

$s_{ur}^{A,DSS,P}$  er tilhørende residual verdier; og

$\tau_0$  er den initiale “cross-anisotropiske” skjærspenningen.

$\hat{J}_3$  finnes fra:

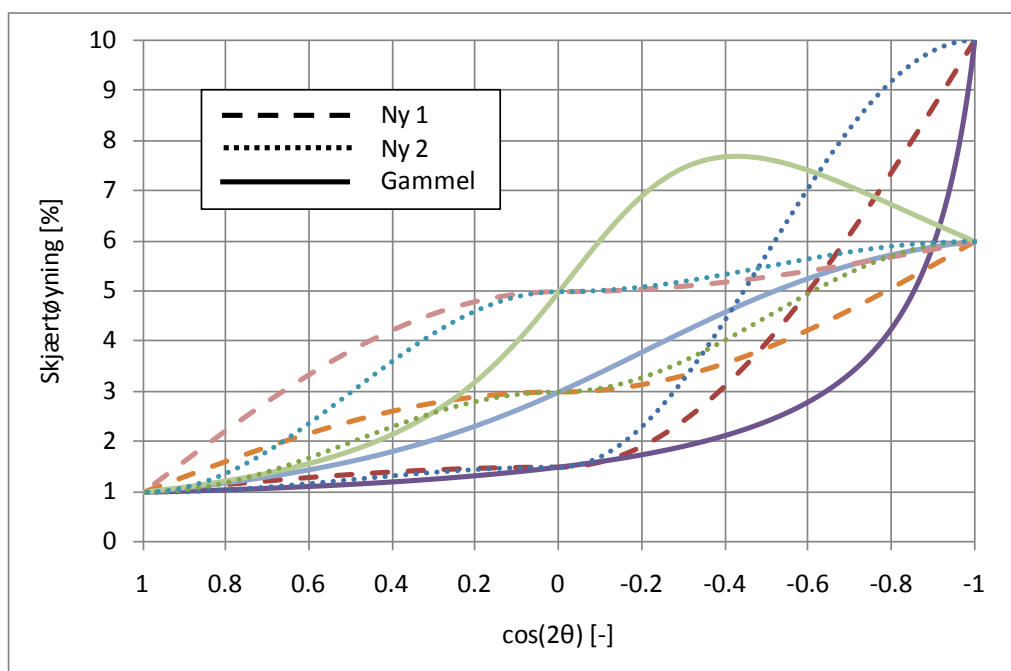
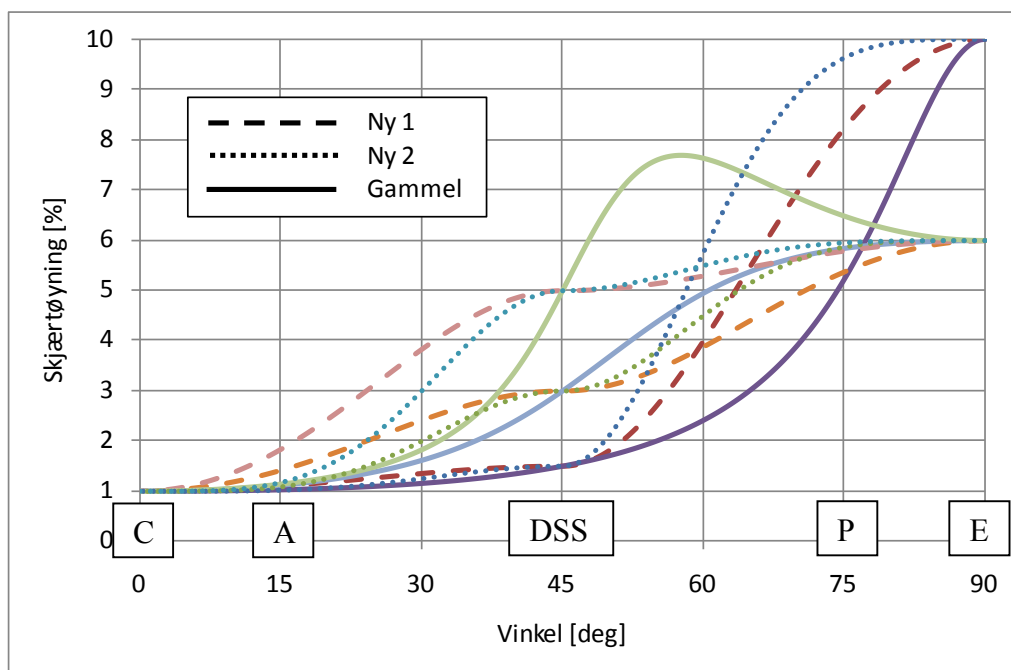
$$\hat{J}_3 = \det(\underline{\hat{s}}) = \hat{s}_x \hat{s}_y \hat{s}_z + 2\hat{s}_{xy} \hat{s}_{yz} \hat{s}_{xz} - \hat{s}_x \hat{s}_{yz}^2 - \hat{s}_y \hat{s}_{xz}^2 - \hat{s}_z \hat{s}_{xy}^2 \quad (\text{A.7})$$

hvor  $\underline{\hat{s}}$  er den modifiserte deviatoriske tensoren samsvarende til  $\hat{s}$ .

## A2 Interpolasjon av karakteristiske plastiske tøyninger

Tidligere ble det brukt elliptisk interpolasjon av bruddtøyninger i NGI-ADPSOft. Dette samsvarer med det som er brukt i NGI-ADP modellen (Grimstad et al., 2011). En slik elliptisk interpolasjon setter begrensninger i valg av verdier for peak/residual tøyninger. Dette for å sikre konveksitet av flyteflaten. En endring i valgt interpolasjonsfunksjon kan derfor øke fleksibiliteten i valg av input parametre. Figur A2.1 viser en sammenligning av gammel og to nye interpolasjonsfunksjoner med ulik input. Hvilken interpolasjonsfunksjon som ønskes brukt kan velges (men Ny 1 velges som "standard" funksjon). Vinkelen som blir brukt i interpolasjonen er definert i ligning (A.8). Merk at 0 grader tilsvare treaks kompresjonsforsøk mens 90 grader tilsvare treaks strekkforsøk. DSS tilsvare en vinkel på 45 grader. De ulike funksjonene er gitt i ligningene (A.9), (A.10) og (A.11) for henholdsvis 1: "Ny 1", 2: "Ny 2" og 3: "gammel" metode.

$$\cos 2\hat{\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{H(1-\omega)}} \cdot \frac{\hat{s}_y}{\sqrt{\hat{J}_2}} \quad (\text{A.8})$$



Figur A2.1 Interpolasjonsfunksjonene ved forskjellig input av tøyninger

Interpolasjon ”Ny 1” er som følger:

$$0 < \cos 2\hat{\theta} < 1$$

$$\gamma_p^p(\hat{\theta}) = \gamma_{p,C}^p + (\gamma_{p,DSS}^p - \gamma_{p,C}^p) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos 2\hat{\theta}\right) \quad (\text{A.9})$$

$$-1 < \cos 2\hat{\theta} < 0$$

$$\gamma_p^p(\hat{\theta}) = \gamma_{p,E}^p + (\gamma_{p,DSS}^p - \gamma_{p,E}^p) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos 2\hat{\theta}\right)$$

Interpolasjon ”Ny 2” er som følger:

$$0 < \cos 2\hat{\theta} < 1$$

$$\gamma_p^p(\hat{\theta}) = \frac{1}{2} \cdot \left[ \gamma_{p,C}^p + \gamma_{p,DSS}^p + (\gamma_{p,DSS}^p - \gamma_{p,C}^p) \cdot \cos(\pi \cdot \cos 2\hat{\theta}) \right] \quad (\text{A.10})$$

$$-1 < \cos 2\hat{\theta} < 0$$

$$\gamma_p^p(\hat{\theta}) = \frac{1}{2} \cdot \left[ \gamma_{p,E}^p + \gamma_{p,DSS}^p + (\gamma_{p,DSS}^p - \gamma_{p,E}^p) \cdot \cos(\pi \cdot \cos 2\hat{\theta}) \right]$$

Den ”gamle” interpolasjonen er som følger:

$$\gamma_p^p(\hat{\theta}) = \frac{\hat{R}_B \cdot \hat{R}_D \cdot \sqrt{(\hat{R}_D^2 - \hat{R}_C^2) \cdot \cos^2 2\hat{\theta} + \hat{R}_C^2} - \hat{R}_D^2 \cdot \hat{R}_A \cdot \cos 2\hat{\theta}}{\hat{R}_B^2 - (\hat{R}_B^2 - \hat{R}_D^2) \cdot \cos^2 2\hat{\theta}} \quad (\text{A.11})$$

$$\text{hvor: } \hat{R}_A = \frac{\gamma_{p,E}^p - \gamma_{p,C}^p}{2}; \hat{R}_B = \frac{\gamma_{p,E}^p + \gamma_{p,C}^p}{2}; \hat{R}_C^2 = \gamma_{p,E}^p \cdot \gamma_{p,C}^p; \hat{R}_D = \frac{\gamma_{p,DSS}^p \cdot \hat{R}_B}{\sqrt{\hat{R}_C^2}}$$

## Vedlegg B - Artikkel

Grimstad, G., Andresen, L. and Jostad, H.P. (2010), "Undrained capacity analyses of sensitive clays using the nonlocal strain approach", 9th HSTAM International Congress on Mechanics, Limassol, Cyprus, 12 – 14 July, 2010

## UNDRAINED CAPACITY ANALYSES OF SENSITIVE CLAYS USING THE NON-LOCAL STRAIN APPROACH

G. Grimstad<sup>1</sup>, H. P. Jostad<sup>2</sup> and L. Andresen<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Norwegian Geotechnical Institute  
P.O. BOX 3930 Ullevål Stadion  
NO-0806 Oslo, Norway

e-mail: gustav.grimstad@ngi.no, hans.petter.jostad@ngi.no, lars.andresen@ngi.no

**Abstract:** Normally consolidated to slightly over-consolidated clays with moderate to high sensitivity tend to display post-peak strain softening response in undrained loading. A total stress based elasto-plastic constitutive model (NGI-ADPsoft) is used to model this behavior. To reduce the effect of mesh dependent results a simple non-local strain approach is adopted in the model. This paper gives a short description of the constitutive model, the implementation of the non-local strain approach into the softening formulation of the model and the calculation procedure for the non-local strain in the FE-program used in this study. The performance of the material model is studied by analyses of a simple shear problem and an undrained bearing capacity problem. It is shown that the model works well as long as the shear band thickness is larger than the element size. However, this requires a very fine mesh in order to model a realistic shear band thickness of clays.

### 1 INTRODUCTION

Normally consolidated to slightly over-consolidated clays with moderate to high sensitivity tend to display post-peak strain softening response in undrained loading, due to the tendency for volume reduction during shear deformation (i.e. contractive response)<sup>[18]</sup>. In addition such materials have stress path dependent response (i.e. anisotropy in undrained shear strength and stiffness)<sup>[4]</sup>. The NGI-ADP model<sup>[10]</sup> takes into account the anisotropic response of soil in undrained loading based on input of undrained shear strengths from triaxial Compression, Extension and Direct Simple Shear tests. However, the NGI-ADP model does not model the post-peak strain softening response, since introducing such response in an elasto-plastic model may lead to mesh dependent results as the governing equations become ill-posed<sup>[11]</sup> without incorporation of an internal length scale<sup>[6]</sup>. Therefore a regularization technique should be used in conjunction with a softening rule, e.g. *strain-gradient* theory<sup>[16]</sup>, *non-local* strain approach<sup>[8]</sup> or strong discontinuities<sup>[17]</sup>. It is observed in many types of soils that the post peak deformations are concentrated in narrow zones called shear bands. The thickness of such shear bands is controlled by the particle size, deformation rate, local pore pressure dissipation and boundary condition. The effect of shear band thickness due to pore pressure dissipation and strain rate were for instance studied in Jostad et.al.<sup>[15]</sup>. A regularization technique introduces an inner length scale that sets this shear band thickness. A plane strain version of the material model has for instance previously been used together with introduction of a special shear band element<sup>[13],[14]</sup>. The draw-back of this method is that it needs a procedure for defining the location of these shear band elements, which may change after first have been introduced.

In undrained shear tests of contractive materials the rate of the test may be slow enough to obtain uniform response far into the softening regime; hence the measured stress-nominal strain behavior can be used directly as stress-strain response into a constitutive model.

The constitutive model NGI-ADPsoft, which is an extended version of the NGI-ADP model incorporates anisotropic softening in addition to the anisotropic undrained hardening response. Andresen and Jostad<sup>[1]</sup> presented the NGI-ANISOFT model, which is a plane strain model with the same features as the NGI-ADPsoft model, however, the NGI-ADPsoft model is formulated in a full 3D stress space and incorporates a regularization technique, i.e. the *modified non-local* strain approach<sup>[19]</sup> also called *over non-local* approach<sup>[2]</sup>.

The material model is implemented using an implicit integration scheme, into the in-house finite element program BIFURC. The program has a solution algorithm specially developed for analyses of instability and bifurcation problems<sup>[12]</sup>.

### 2 NON-LOCAL STRAIN APPROACH

In order to regularize the strain softening behavior and control the shear band thickness a simple version of the non-local strain approach<sup>[19]</sup> is adapted into the softening formulation of the NGI-ADPSoft model. The advantage of utilizing this regularization technique is that the approach may easily be implemented into a non-linear finite element program without reformulating the governing finite element equations, which generally is

required for the other types of regularization techniques. This means that any conventional displacement based finite elements may be used without any modifications. The non-local strain approach is implemented only at the material point level. This makes it suitable to also be implemented in user-defined material models in commercial finite element programs as Plaxis and ABAQUS.

Brinkgreve<sup>[5]</sup> found when using the classical *non local strain* formulation from Eringen<sup>[8]</sup>, that the strain may still concentrate in the center points of the localized zone and not spreading to the surrounding points. Therefore he proposed a formulation which reduces the strain in the centre and increases the strain to the edge of the softening zone, consequently widen the localized zone to a thickness that can be controlled by the input parameters. This is done by introducing a parameter  $\alpha$  that has to be larger than *one* for the approach to be effective. This so-called over non-local plastic strain increment is defined as:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{p*}(\mathbf{x}_i) = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}_i) - \alpha \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}_i) + \frac{\alpha}{V} \int (w(\mathbf{x}) \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x})) dV \quad (1)$$

Where  $V = \int w(\mathbf{x}) dV$ ,  $w(\mathbf{x}) = \int \frac{1}{l\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)^T \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)}{l^2}} dV$  and  $\mathbf{x}_i$  is the integration point coordinates and  $l$  is the internal length parameter. Equation (1) can be simplified into equation (2), where the local plastic strain increment is replaced by the total local strain increment by assuming that the elastic part of the non-local strain increment is equal to the local elastic contribution, or that the elastic contributions are negligible compared to the plastic contributions.

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{p*}(\mathbf{x}) \approx \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}) - \alpha \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) + \frac{\alpha}{V} \int (w(\mathbf{x}) \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})) dV \quad (2)$$

The non-local strain contribution (i.e. the integral) is calculated numerically by summing over all integration points. The disadvantage of using  $\alpha$  larger than one is that the non-local plastic strain increment may become negative and thus preventing the softening to occur. Therefore, Galavi and Schweiger<sup>[9]</sup> proposed an alternative to the *over non-local* approach where a similar effect is obtained by modifying the weighting function  $w(\mathbf{x})$  used in the classic formulation with  $\alpha = 1$ . This seems to be an attractive formulation that we will consider in a more detailed evaluation in the future.

### 3 THE NGI-ADPSOFT MODEL

An elasto-plastic model with anisotropic strain hardening/softening response limited to plane strain condition was presented by Andresen and Jostad<sup>[1]</sup>. An extension of this model to a full 3D stress space was presented in Grimstad et. al.<sup>[10]</sup>. This model which is called NGI-ADP, is without the strain softening response. The extension to include softening is here obtained by including a second hardening function,  $\kappa_2$ , in addition to the original hardening function,  $\kappa_1$ . A short description of the extended NGI-ADPsoft model is given below. Note that  $y$  is used as direction of gravity and that compressive stresses are assumed positive.

In order to incorporate anisotropy in shear strength and hardening/softening response, into a Tresca type of model, a modified stress vector as defined in equation (3) is applied.

$$\begin{bmatrix} \hat{S}_x \\ \hat{S}_y \\ \hat{S}_z \\ \hat{S}_{xy} \\ \hat{S}_{xz} \\ \hat{S}_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x - p + (1 - \kappa_1) \cdot \frac{2}{3} \cdot \tau_0 + \kappa_1 \cdot (1 - \kappa_2) \cdot \frac{1}{3} (s_u^A - s_u^P) + \kappa_2 \cdot \frac{1}{3} (s_{ur}^A - s_{ur}^P) \\ \sigma_y - p - (1 - \kappa_1) \cdot \frac{4}{3} \cdot \tau_0 - \kappa_1 \cdot (1 - \kappa_2) \cdot \frac{2}{3} (s_u^A - s_u^P) - \kappa_2 \cdot \frac{2}{3} (s_{ur}^A - s_{ur}^P) \\ \sigma_z - p + (1 - \kappa_1) \cdot \frac{2}{3} \cdot \tau_0 + \kappa_1 \cdot (1 - \kappa_2) \cdot \frac{1}{3} (s_u^A - s_u^P) + \kappa_2 \cdot \frac{1}{3} (s_{ur}^A - s_{ur}^P) \\ \tau_{xy} \cdot \left( \frac{s_u^A + s_u^P}{2 \cdot s_u^{DSS}} \cdot (1 - \kappa_2) + \kappa_2 \cdot \frac{s_{ur}^A + s_{ur}^P}{2 \cdot s_{ur}^{DSS}} \right) \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \cdot \left( \frac{s_u^A + s_u^P}{2 \cdot s_u^{DSS}} \cdot (1 - \kappa_2) + \kappa_2 \cdot \frac{s_{ur}^A + s_{ur}^P}{2 \cdot s_{ur}^{DSS}} \right) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Where:  $\sigma_{x,y,z}$  and  $\tau_{xy,xz,yz}$  are the Cartesian stresses and  $p$  is the mean stress



$s_u^{A,DSS,P}$  is the active, direct simple shear or passive undrained shear strengths in plane strain condition

$s_u^{A,DSS,P,r}$  is the residual values of the active, direct simple shear or passive undrained shear strengths in plane strain condition

$\tau_0$  is the initial cross-anisotropic shear stress (i.e.  $\tau_0 = (\sigma_y - \sigma_x)/2$ )

$\kappa_{1,2}$  are hardening functions as given in equation (4) and(5)

$$\kappa_1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{\gamma^p / \gamma_p^p}}{1 + \gamma^p / \gamma_p^p} \text{ when } \gamma^p < \gamma_p^p \text{ else } \kappa_1 = 1 \quad (4)$$

$$\kappa_2 = \begin{cases} 0 & \text{when } \gamma^{p*} \leq \gamma_p^p \\ \frac{1}{2} \cdot \left( 1 - \cos \left( \pi \cdot \frac{\gamma^{p*} - \gamma_p^p}{\gamma_r^p - \gamma_p^p} \right) \right) & \text{when } \gamma_p^p < \gamma^{p*} < \gamma_r^p \\ 1 & \text{when } \gamma^{p*} \geq \gamma_r^p \end{cases} \quad (5)$$

$\gamma^p$  and  $\gamma^{p*}$  are local and non-local plastic shear strains

$\gamma_p^p$  and  $\gamma_r^p$  are stress state dependent plastic peak and residual shear strain respectively. i.e. the respective strains are interpolated by an elliptical function between the input values for the peak/residual shear strain for active, direct and passive stress state.

The yield criterion for the NGI-ADPsoft model is defined as:

$$F = \sqrt{\hat{J}_2} \cdot H(\hat{J}_2, \hat{J}_3) - \kappa_1 \cdot (1 - \kappa_2) \cdot \frac{s_u^A + s_u^P}{2} - \kappa_2 \cdot \frac{s_{u,r}^A + s_{u,r}^P}{2} = 0 \quad (6)$$

Where the invariants  $\hat{J}_2$  and  $\hat{J}_3$  are calculated from the modified stress vector (equation (3)) rather than from the original stress vector. And  $H(\hat{J}_2, \hat{J}_3)$  is defined as:

$$H(\hat{J}_2, \hat{J}_3) = \left| \cos \left( \frac{1}{6} \arccos \left( 1 - a_1 \cdot \frac{27}{2} \cdot \frac{\hat{J}_3^2}{\hat{J}_2^3} \right) \right) \right| \quad (7)$$

The parameter  $a_1$ , proposed by Billington<sup>[3]</sup>, is used to approximate the Tresca criterion ( $a_1 = 1$  results in exact Tresca). However, the exact value of 1 is not recommended since that leads to numerical difficulties around the corners of the criterion.  $a_1$  is linked to the ratio between the triaxial compressive strength ( $s_u^C$ ) and the biaxial active strength ( $s_u^A$ ). This ratio is set to 0.99 in the simulations presented later in this paper. In addition to the modified Tresca yield criterion the model uses a von-Mises type of plastic potential function using the modified stress vector.

Distinguishing between  $\gamma^p$  and  $\gamma^{p*}$  for the hardening and softening part is of great importance since the *over non-local* approach cannot be used for the hardening part of the function. This would result in redistribution of plastic shear strain in the hardening regime and consequently lead to no or “wrong” solution.  $\gamma^{p*}$  is approximated from the second strain invariant of each individual component of equation (2).

The model is implemented into the in-house finite element code BIFURC, where the *non-local* part of the *over non-local* strain increment is calculated at the beginning of each iteration. An implicit integration scheme adopted from de Borst and Heeres<sup>[7]</sup> is used to determine the local plastic strains.

## 4 SIMULATIONS

To demonstrate the performance of the model, simulation of a 1D shear problem is first presented. Then the model is applied to a plane strain bearing capacity problem. The second problem has previously also been studied by adaptive mesh refinements using standard elements and by introducing zero thickness interface elements<sup>[13]</sup> or a special finite thickness shear band element with constant shear strain across the element<sup>[14]</sup>. Based on these analyses it was found to be difficult to develop a robust procedure to define where to include these special elements. Before the peak load is reached the location of the shear band may gradually change, and new shear bands may emerge from existing shear bands in order to propagate in more critical directions. For the

actual problem, the peak load is reached before a fully developed failure mechanism. The purpose of this study is to see whether the non-local strain approach was able to overcome some of these difficulties.

#### 4.1. 1D shear deformation

Two noded 1D shear elements are used in this simulation. The length of the modeled shear zone is set to be 10 times the internal length parameter,  $l$ , and  $\alpha$  is set to be 1.58 since the internal length then is approximately equal to the internal length in the strain gradient theory<sup>[5]</sup>. Element meshes with 1, 10, 20 and 50 elements are considered. A slightly weaker element with a shear strength that is reduced by 1% is included close to the centre of the shear zone. For this 1D case the yield criterion (equation (6)) is reduced to equation (8).

$$F = \tau - \kappa_1 \cdot (1 - \kappa_2) s_u - \kappa_2 \cdot s_{ur} = 0 \tag{8}$$

The residual shear strength,  $s_{ur}$ , is taken as 50% of the peak shear strength,  $s_u$ . The plastic peak and residual shear strains are set to 1.0 and 20 percent, respectively. The initial shear stress is set to zero. In addition the elastic shear modulus,  $G_{ur}$ , (used for initial stiffness as well as for unloading and reloading stiffness) is set to 500 times the peak undrained shear strength,  $s_u$ .

The calculated normalized load-displacement curves are shown in Figure 1. It is observed that the meshes with 10, 20 and 50 elements give almost exactly the same results, which demonstrates that the regularization technique works as expected. Figure 2 shows the horizontal displacement profiles at the end of the analyses. The displacement profiles show that for the mesh with 10 elements, only one element has significant shear deformation. While for the meshes with 20 and 50 elements the localized shear zone involves more than one element. The thickness of the calculated shear zone (including all elements with softening) is approximately three times the specified internal length parameter.

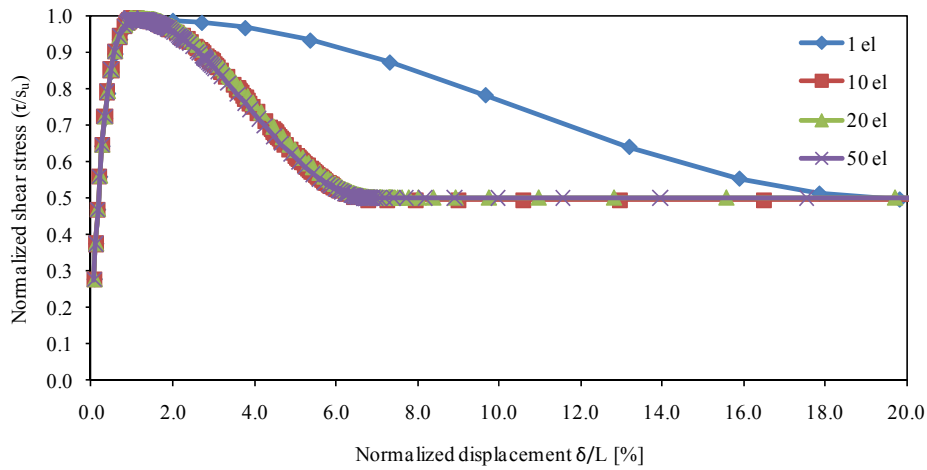


Figure 1. Calculated normalized load-displacement curves obtained with different number of elements

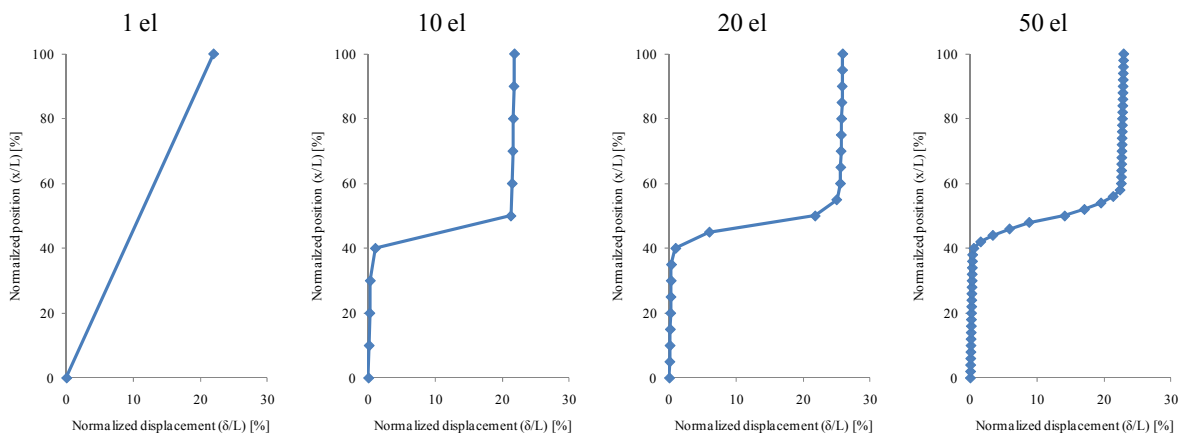


Figure 2. Normalized displacement profiles for the shear zone obtained with different number of elements

### 4.2. Bearing capacity problem

The progressive development of shear bands in sensitive clay under undrained condition is studied by considering the bearing capacity problem shown in Figure 3. The main focus here is the peak capacity. The properties of the soil are taken as constant within the soil mass and the weight of the soil is neglected. These idealizations are performed in order to simplify the interpretation of the obtained results. The strip foundation at the top of the slope, with the width  $B = 5$  m, is taken as rigid and perfectly rough. Table 1 gives the input parameters used for the anisotropic material. The specified stress-strain curves are normalized by the plane strain active undrained shear strength,  $s_u^A$ . The initial values of the hardening parameters are adjusted to a zero initial stress condition obtained by unloading from an initial shear stress defined by  $\tau_0/s_u^A = 0.25$ . Figure 4 shows the responses from simulations of an active and a passive biaxial test and a direct simple shear test using the given input parameters.

The bearing capacity problem is analyzed with two different finite element meshes (i.e. 330 and 1070 eight-noded Serendipity elements with reduced integration) and various internal length parameters. The over-non-local strain parameter,  $\alpha$ , is taken as either zero (without non-local strain) or 1.58 (equivalent strain gradient approach). Finally in order to check the possibility of accounting for a shear band thickness that is smaller than the actual element size, the material response curves are modified such that the softening rate is scaled by the ratio between the required internal length  $l^*$  and the actual internal length used in the analyses (i.e. the adjusted residual plastic shear strain  $\gamma_r^{p*}$  is calculated from equation (9)).

$$\gamma_r^{p*} = (\gamma_r^p - \gamma_p^p) \cdot \frac{l^*}{l} + \gamma_p^p \tag{9}$$

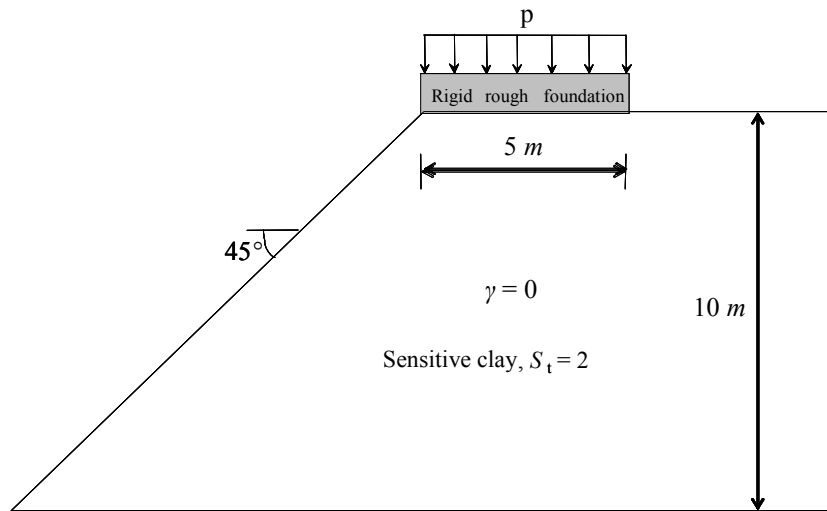


Figure 3. Bearing capacity problem

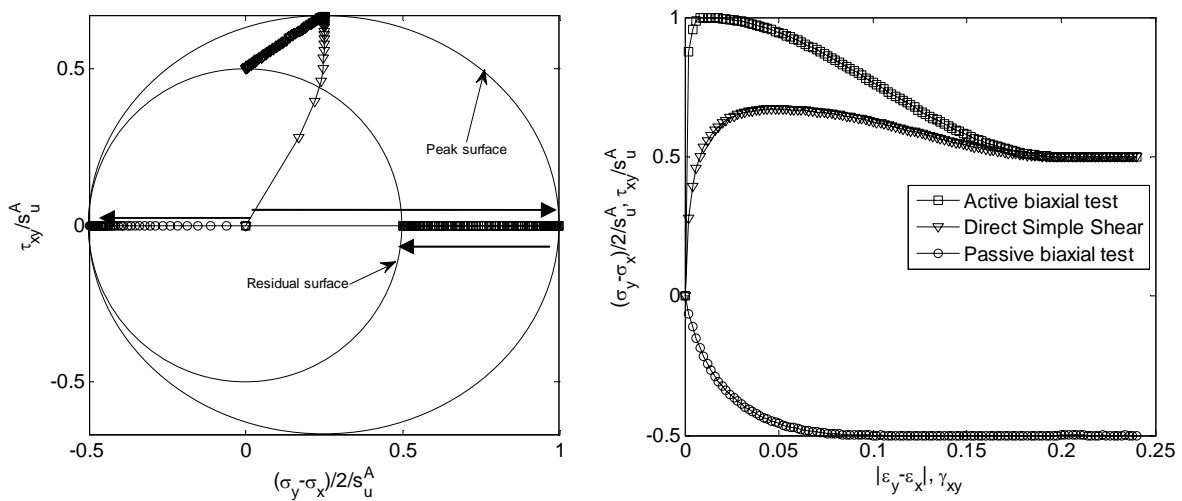


Figure 4. Simulated idealized response curves for plane strain active (A), Direct Simple Shear (DSS) and plane strain passive (P) tests

The obtained normalized peak loads versus the inverse of the internal length parameter for the two different meshes are presented in Figure 5. The peak capacities which decrease with reducing  $l$  are almost independent of the mesh. The differences which are assumed to be due to discretization errors are smaller than obtained for perfectly plasticity, since the peak loads are reached before a fully developed failure mechanism is obtained. For  $\alpha = 0$  (without non-local strain) the shear band thickness is determined by the mesh and therefore gives the limit for the lowest possible peak load without scaling the softening curve. An example of shear strain distribution after significant softening has taken place is shown in Figure 6. The results are obtained with the mesh with 1070 elements and  $l = 0.5$  m. The thickness of the localized zone (shear band) which spans over several elements is close to  $3l$ . Figure 7 shows the distribution of the shear strain at the peak load for the mesh with 330 (left) and 1070 (right) elements when  $l = 0.2$  m. The thickness of the zone with localized shear strain is almost identical. This demonstrates that nearly identical shear strain distributions are obtained using two totally different meshes. However, it can be seen that further reduction of  $l$  for the mesh with 330 elements the results starts to be influenced by the element discretization.

Since the actual thickness of a shear band in clay might be less than the lowest value that can be captured by the applied meshes, the material softening curve for the simulations with  $l \geq 0.2$  m is scaled such that the effective internal length becomes equal to 0.02m. The obtained relative displacement across the shear band is then assumed to be as using  $l = 0.02$  m. This scaling approach is found to work well when analyzing shear band formation in biaxial tests<sup>[9]</sup>. As seen in Figure 8 this does not seem to be the case for this particular problem. However, the results might still be influenced by the meshes, and a conclusion on whether or not the scaling procedure is effective or not for this particular boundary value problem cannot be drawn without simulations with further mesh refinement. This result agrees with the conclusion in Vermeer et.al.<sup>[20]</sup>. They came to the conclusion that for problems where the thickness of possible shear bands is several magnitudes smaller than the size of the boundary value problem, non-local approach is computationally not attractive. This is in contrast to the conclusion drawn by Galavi and Schweiger<sup>[9]</sup> which found that the non-local strain approach along with scaling regularized the solution in their study.

$G_{ur}/s_u^A$	$s_u^{DSS}/s_u^A$	$s_u^P/s_u^A$	$s_{ur}^A/s_u^A$	$s_{ur}^{DSS}/s_u^A$	$s_{ur}^P/s_u^A$	$\gamma_p^A$	$\gamma_p^{DSS}$	$\gamma_p^P$	$\gamma_r^A$	$\gamma_r^{DSS}$	$\gamma_r^P$	$\tau_0/s_u^A$
500	0.67	0.5	0.5	0.5	0.5	0.01	0.05	0.10	0.20	0.20	0.20	0.25

Table 1: Parameters used for modeling the anisotropic material with the NGI-ADPsoft model

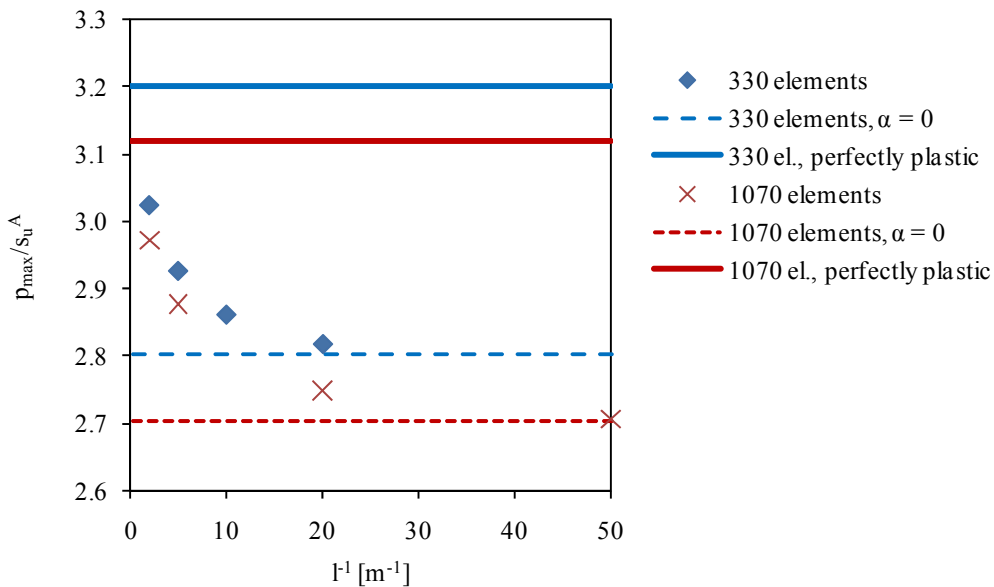


Figure 5 Normalized peak load for different internal length parameters and different number of elements.

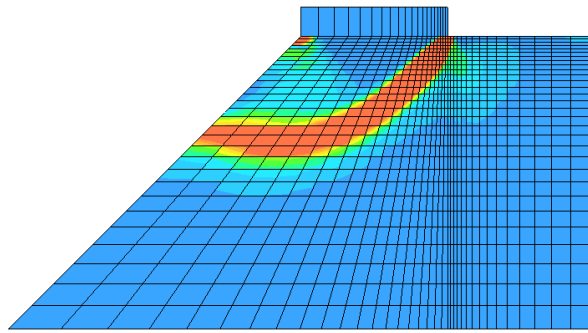


Figure 6 Shear strain at 0.2 m displacement of foundation (1070 elements and  $l = 0.5$  m)

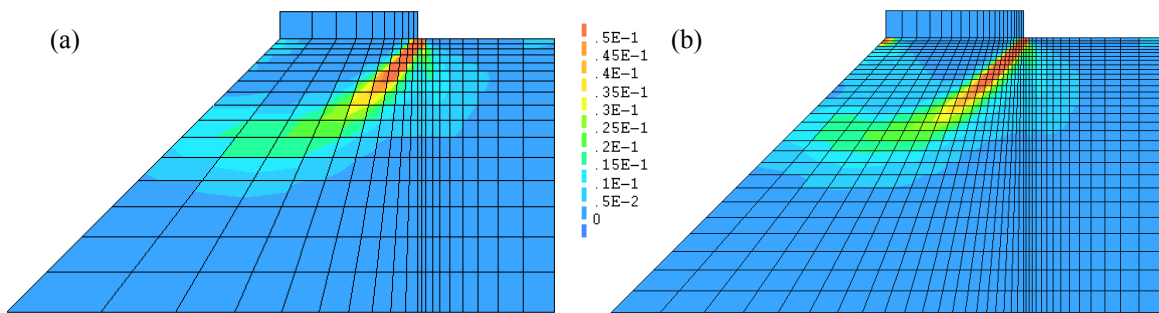


Figure 7 Shear strain at peak load with (a) 330 elements and (b) 1070 elements,  $l = 0.2$  m

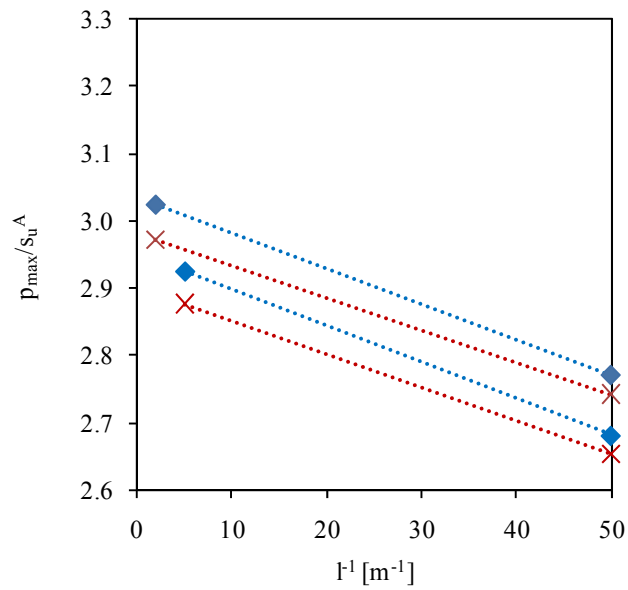


Figure 8 Change in normalized peak load for different internal length parameters with effect of scaling the softening curve

## 5 CONCLUSION

The *over non-local* strain approach proposed by Vermeer and Brinkgreve<sup>[19]</sup> has been adapted in the NGI-ADPSoft model in order to regularize the strain-softening behavior of sensitive clays. This regularization technique is attractive first of all due its simplicity, i.e. it only involves implementation at the material point level. The performance of the model has been studied by considering two problems; a 1D simple shear problem and a bearing capacity problem. For the simple shear problem the obtained results are as expected, i.e. the results are independent of the mesh as long as the internal length is sufficient large compared to the element size. Also for the significantly more complex bearing capacity problem analyzed by two meshes with totally different number of elements the obtained results are almost identical.

The main limitation is that the method requires a mesh that is finer than the specified internal length. Therefore, to account for a realistic shear band thickness for clays the actual softening curve needs to be adjusted. However, for the considered bearing capacity problem such scaling did not give peak loads that were consistent with the reduction in the internal length. This supports previous findings that such scaling is problem dependent and therefore only should be considered as an approximation of the solution.

## REFERENCES

- [1] Andresen, L. and Jostad, H.P. (2002), "A constitutive model for anisotropic and strain-softening clay" *Numerical Models in Geomechanics - NUMOG VIII*. Rome, Italy, pp. 79-84.
- [2] Bazant, Z. P., and Di Luzio, G. (2004), "Nonlocal microplane model with strain-softening yield limits." *Int. J. Solids Struct.*, 41, pp. 7209–7240.
- [3] Billington, E. W. (1988), "Generalized Isotropic Yield Criterion for Incompressible Materials", *Acta Mechanica*, 72, pp. 1-20.
- [4] Bjerrum, L. (1973), "Problems of Soil Mechanics and Construction on Soft Clays, State of the Art Report to Session IV", *8th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Moscow, pp. 111-159.
- [5] Brinkgreve, R.B.J (1994), *Geomaterial Models and Numerical Analysis of Softening*, PhD thesis, TU Delft, Delft, The Netherlands.
- [6] de Borst, R, Sluys, L.J., Mühlhaus H.-B. and Pamin, J. (1993), "Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation", *Eng. Comp.*, 10, pp. 99-121.
- [7] de Borst, R. and Heeres, O. M. (2002), "A unified approach to the implicit integration of standard, non-standard and viscous plasticity models", *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 26, pp- 1059–1070.
- [8] Eringen, A.C. (1981), "On non-local plasticity", *Int. J. Eng. Science*, 19, pp. 1461-1474.
- [9] Galavi, V. and Schweiger, H.F. (2010), "Nonlocal Multilaminar Model for Strain Softening Analysis" *International Journal of Geomechanics*, 10, pp. 30-44.
- [10] Grimstad, G., Andresen, L. and Jostad, H.P. (2010), "NGI ADP: Anisotropic Shear Strength Model for Clay", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, submitted
- [11] Hill, R. 1958. "A general theory of uniqueness and stability in elastic plastic solids", *J. Mech. Phys. Solids*, 6, pp. 236 -249.
- [12] Jostad, H.P. and Nordal S. (1995). "Bifurcation analysis of frictional materials". *Numerical Models in Geomechanics NUMOG V*, Davos, Switzerland, pp. 173-179.
- [13] Jostad, H.P., Andresen, L. (2002), "Capacity analysis of anisotropic and strain-softening clays", *Numerical Models in Geomechanics - NUMOG VIII*, Rome, Italy, pp. 469-474.
- [14] Jostad, H.P. and Andresen, L. (2004), "Modelling of shear band propagation in clay using interface elements with finite thickness", *Num. Mod. Geomech. - NUMOG IX*, Ottawa, Canada, pp. 121-128.
- [15] Jostad, H.P.; Andresen, L.; Thakur, V. (2006), Calculation of shear band thickness in sensitive clays. *European Conference on Numerical Methods in Geotechnical Engineering*, 6, Graz, Austria 2006, pp. 27-32
- [16] Mindlin, R.D, (1965), "Second gradient of Strain and Surface Tension in Linear Elasticity", *Int. J. Solids and Struct.*, 1, pp. 417-437.
- [17] Simo J.C., Oliver J. and Armero F. (1993), An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent solids, *Computational Mechanics* 12, pp. 277-296.
- [18] Vardoulakis, I, (1985), "Stability and bifurcation of undrained, plane rectilinear deformations on water-saturated granular soils", *Int. J. Num. and Anal. Meth. In Geomech.*, 9, pp. 399-414.
- [19] Vermeer, P. A., Brinkgreve, R. B. J. (1994), A new effective non-local strain-measure for softening plasticity. *Proc. 3rd Intern. Workshop on Localisation and Bifurcation Theory for Soils and Rocks*, Grenoble, September 1993, pp. 89-100.
- [20] Vermeer, P.A., Vogler U. and Li, B. (2004), "On the performance of a non-local softening model", *2<sup>nd</sup> International Symposium on Continuous and Discontinuous Modelling of Cohesive Frictional Materials*, Stuttgart, Germany, pp. 369-380.



## Vedlegg C - Artikkel

Jostad, H.P., and Grimstad, G., 2011, "Comparison of distribution functions for the non-local strain approach", 2nd International Symposium on Computational Geomechanics (ComGeo II), Cavtat-Dubrovnik, Croatia, 27-29 April, 2011

# COMPARISON OF DISTRIBUTION FUNCTIONS FOR THE NON-LOCAL STRAIN APPROACH

H. P. Jostad

*Computational Geomechanics group, Norwegian Geotechnical Institute, Oslo, Norway*

G. Grimstad

*Computational Geomechanics group, Norwegian Geotechnical Institute, Oslo, Norway*

**ABSTRACT:** Sensitive soft clays generally display a significant post peak strain softening response under undrained deformation. A consequence of this behavior is that the continuing response beyond the peak shear stress is not unique. In finite element analyses a shear band generally develops in this phase. However, without a proper regularization technique the thickness of the shear band and generally also the orientation are governed by the finite element discretization. To overcome the problem of mesh dependency an internal length scale, that controls the shear band thickness without prescribing the orientation, must be introduced. One method to incorporate an internal length scale is to use the non-local strain approach. This approach may be implemented into any non-linear finite element programs without reformulating the governing finite element equations. This paper describes the implementation of the non-local strain approach into a user-defined material model that is used in the finite element program PLAXIS. The NGI-ADP model with a strain softening formulation is used. The effect of using different weighting functions for calculating the non-local strain is also studied in this paper.

## 1 INTRODUCTION

The characteristic behavior of normally consolidated to slightly over-consolidated marine clays with moderate to high sensitivity display post-peak strain softening response in undrained loading. The reason for this behavior is the tendency of volume reduction during shear deformation (i.e. contractive response) and thus generation of pore pressure and reduction in effective stresses in undrained condition. The consequence of this characteristic behavior of sensitive clay is that failure or capacity may not be calculated using conventional limiting equilibrium methods. Instead, the peak load or capacity may be defined by an instability condition where the second order work becomes negative (see for instance the discussions in Darve (2010)). At this condition we have a deformation pattern where the effect of the reduction in shear stresses due to strain softening in part of the soil mass becomes larger than the resistance of the surrounding material. In this case we may start a progressive failure mechanism where the spreading of the failure zone may be significantly larger than captured by classical limiting equilibrium methods. This type of failure may be particularly dramatic in cases of failure in quick clay, where the fully remolded shear strength is less than 0.5 kPa.

In order to analyze this type of progressive failure in sensitive clays it is necessary to take into account the effect of strain softening behavior. This requires that these problems are analyzed by numerical methods as for instance the finite element method. However, when



analyzing strain softening problems with conventional displacement based finite element formulation, the results become mesh dependent. In order to overcome this problem an internal length scale, that controls the shear band thickness (without prescribing the orientation), must be introduced. One method to incorporate an internal length scale is to use the non-local strain approach (Eringen, 1981). This approach may be implemented into any non-linear finite element programs without reformulating the governing finite element equations. Grimstad et al. (2010) presented the implementation of a special version of the non-local strain approach proposed by Vermeer & Brinkgreve (1994) into a constitutive material model for undrained behavior of soft clay (NGI-ADP with softening). Due to some uncertainties related to the mathematical formulation of this so-called over non-local strain approach, the authors wanted to study the effect of this formulation in some more details and compare it with another formulation proposed by Galavi & Schweiger (2010). This is the main purpose of this paper.

## 2 NGI-ADPSOFT MODEL

To model the behavior of soft clay under perfectly undrained condition an elasto-plastic model with anisotropic strain hardening/softening response has been developed. The mathematical formulation of the model without the softening part which is called NGI-ADP, is presented in Grimstad et al. (2011). The extension in order to model the post-peak behavior of sensitive clays is obtained by including a second hardening function,  $\kappa_2$ , in addition to the original hardening function,  $\kappa_1$ , together with a non-local strain formulation. The strain softening formulation is based on previous work described for instance in Andresen & Jostad (2002), however, there limited to plane strain conditions and without the non-local strain. A simple 1D representation of the yield function is shown in equation (1).

$$F = \tau - \kappa_1 \cdot (1 - \kappa_2) s_u - \kappa_2 \cdot s_{ur} = 0 \quad (1)$$

Where  $\tau$  is the shear stress,  $s_u$  is the peak undrained shear strength and  $s_{ur}$  is the residual undrained shear strength. The hardening functions  $\kappa_1$  and  $\kappa_2$  are given by equation (2) and equation (3).

$$\kappa_1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{\gamma^p / \gamma_p^p}}{1 + \gamma^p / \gamma_p^p} \text{ when } \gamma^p < \gamma_p^p \text{ else } \kappa_1 = 1 \quad (2)$$

$$\kappa_2 = \begin{cases} 0 & \text{when } \gamma^{p*} \leq \gamma_p^p \\ \frac{1}{2} \cdot \left( 1 - \cos \left( \pi \cdot \frac{\gamma^{p*} - \gamma_p^p}{\gamma_r^p - \gamma_p^p} \right) \right) & \text{when } \gamma_p^p < \gamma^{p*} < \gamma_r^p \\ 1 & \text{when } \gamma^{p*} \geq \gamma_r^p \end{cases} \quad (3)$$

Where  $\gamma^p$  and  $\gamma^{p*}$  are local and non-local plastic shear strains.  $\gamma_p^p$  and  $\gamma_r^p$  are plastic peak and residual shear strain, respectively. The extensions to a full 3D stress space with anisotropic or stress path dependent behavior are described in more details in Grimstad et al. (2011). The full set of input parameters to the model is given below:

$G_{ur}$  is the elastic unloading/reloading shear modulus

$s_u^A, s_u^{DSS}, s_u^P$  are the active, direct simple shear and passive undrained shear strengths in plane strain condition

$s_{u_r}^A, s_{u_r}^{DSS}, s_{u_r}^P$  are the residual values of the active, direct simple shear and passive undrained shear strengths in plane strain condition

$\tau_0$  is the initial cross-anisotropic shear stress

$\varepsilon_{lf}^C$  is the maximum axial strain at the peak triaxial undrained compression strength  $s_u^C$

$\gamma_f^{DSS}$  is the maximum shear strain at the peak undrained DSS strength  $s_u^{DSS}$

$\varepsilon_{lf}^E$  is the maximum axial strain at the peak triaxial undrained extension strength  $s_u^E$

$\varepsilon_{lr}^C$  is the maximum axial strain at the residual triaxial undrained compression strength  $s_{ur}^C$

$\gamma_r^{DSS}$  is the maximum shear strain at the residual undrained DSS strength  $s_{ur}^{DSS}$

$\varepsilon_{lr}^E$  is the maximum axial strain at the residual triaxial undrained extension strength  $s_{ur}^E$

These parameters may be obtained from anisotropically consolidated undrained triaxial compression and extensions tests and undrained direct simple shear (DSS) tests. The ratio between plane strain and triaxial strength is based on in-house experience or obtained from additional biaxial tests. The shear strains at the residual strengths assume that the samples deform uniformly in the post-peak regime. If this is not the case, these strains must be corrected for the actual deformation pattern in the tests. These corrections can for instance be found by FE simulations as for instance described in Andresen & Jostad (1998).

### 3 NON-LOCAL STRAIN APPROACH

In order to regularize the strain softening behavior and control the shear band thickness the non-local strain approach has been implemented into the above constitutive model. The implementation and some applications were presented in Grimstad et al. (2010).

The classical formulation of the non-local strain proposed by Eringen (1981) is shown in equation (4).

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{p*}(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{V} \int (w(\mathbf{x}) \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x})) dV \quad (4)$$

Where  $V$  is the integral of  $w(\mathbf{x})$  over the volume,  $w(\mathbf{x})$  is the Gauss distribution function given in equation (5) and  $\mathbf{x}_i$  is the integration point coordinates.

$$w(\mathbf{x}) = \frac{1}{l\sqrt{\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{l^2}\right) \quad (5)$$

The main purpose of this formulation is that the strain softening response in an integration point is not only governed by the local plastic strain, but instead the plastic deformation given by  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{p*}$  within a specific volume governed by the internal length  $l$ . This may be a rational idealization when transforming microscopic stresses between soil grains to classical continuum based stresses. The disadvantage is at that this averaging method is governed by the internal length  $l$  and the distribution function  $w(\mathbf{x})$ , which are difficult to determine physically. In this study the internal length  $l$  is used to control the effective thickness of shear bands that develop in the strain softening regime during undrained deformations of sensitive soft clays. It is assumed that the effective shear band thickness for a particular problem is known. This is therefore the motivation for another interesting research topic related to this problem at NGI and Norwegian University of Science and Technology (NTNU).

The weighting function  $w(\mathbf{x})$  is so far only used to obtain an effective and robust solution during development and propagation of shear bands. To study the effect of the weighting function the different approaches proposed by Vermeer & Brinkgreve (1994) and Galavi & Schwiager (2010) are adapted into the softening formulation of the NGI-ADPSOft model.

Brinkgreve (1994) found when using the classical non local strain formulation from Eringen (1981), that the strain may still concentrate in the center points of the localized zone and not spreading to the surrounding points. Therefore he proposed a formulation which reduces the strain in the centre and increases the strain to the edge of the softening zone and consequently widens the localized zone to a thickness that can be controlled by the input parameters. This is done by introducing a parameter  $\alpha$  that has to be larger than one for the approach to be effective. This so-called *over non-local* plastic strain increment is defined as:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{p*}(\mathbf{x}_i) = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}_i) - \alpha \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}_i) + \frac{\alpha}{V} \int (w(\mathbf{x}) \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x})) dV \quad (6)$$

The disadvantage of this formulation is that the shear band thickness is controlled by two parameters, and it is unclear what the optimum combination of  $\alpha$  and  $l$  is. Brinkgreve & Vermeer (1994) suggested that  $\alpha = 2$  should work well. However, by considering equation (6), it is also seen that by using  $\alpha$  larger than one the non-local plastic strain increment may even become negative and thus delaying the softening response. The effect of using different combinations of  $\alpha$  and  $l$  will therefore be studied by numerical analyses in the next Chapter.

Due to the disadvantage of the above over non-local formulation Galavi & Schwiager (2010) proposed an alternative weighting function where a similar effect is obtained by modifying the weighting function  $w(\mathbf{x})$ . This function is then used in the classic non-local strain formulation ( $\alpha = 1$ ). The weighting function proposed by Galavi & Schwiager (2010) is given in equation (7). This non-local strain formulation is for simplicity in the following called G&S.

$$w(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}}{l^2} \cdot \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{l^2}\right) \quad (7)$$

### 3.1 Analytical solution of effective thickness of shear band as a function of $l$

Brinkgreve (1994) gave an analytical solution for a tension bar problem with periodical localization. This solution was found by assuming that the plastic strain is distributed in a cosine distribution. Combining the equation for the actual *non-local* strain with the cosine distribution of plastic strain results in an analytical expression for the one dimensional *non-local* strain,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{p*}(x)$ . Requiring that  $\boldsymbol{\varepsilon}^{p*}(x)$  is constant within the shear band, i.e. that  $d\boldsymbol{\varepsilon}^{p*}(x)/dx = 0$  (which also gives a constant stress within the shear band), the effective thickness of the shear band can be found. For the *over non-local* approach this results in an equation for the effective shear band thickness as a function of  $\alpha$  as given by equation (8). This means that for selection of  $\alpha = 1.58$  the effective thickness of the shear band,  $t_{sb}$ , equals  $\pi$  times the internal length ( $t_{sb} = \pi \cdot l$ ).

$$t_{sb} = \pi \cdot l_{int} \cdot \left( \ln\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right) \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (8)$$

The same procedure is also used for the G&S approach. In such case the weighting function in the expression for  $\varepsilon^p(x)$  is replaced by the modified version. However, in this case the integral to be solved is more difficult than for the Gauss distribution. The solution for the effective shear band thickness using the modified weighting function is given by solving equation (9) numerically for  $t_{sb}$  as a function of  $l$ , this gives  $t_{sb} \approx 3.4 \cdot t$ .

$$2 \cdot \pi \cdot \frac{l_{int}}{t_{sb}} \cdot \exp\left(-\left(\frac{\pi l_{int}}{t_{sb}}\right)^2\right) \cdot \int_0^{\frac{\pi l_{int}}{t_{sb}}} e^{-r^2} dr = 1 \quad (9)$$

### 3.2 Implementation

The NGI-ADPSOFT model is implemented into the in-house finite element code BIFURC, where the non-local strain increment (total strain increment) is calculated at the start of each iteration. The model and method are also implemented as a user-defined material model in the commercial finite element program PLAXIS. In this subroutine the non-local strain is calculated from the plastic strain increment in the previous iteration. In both cases an implicit integration scheme adopted from de Borst & Heeres (2002) is used to determine the local plastic strains. The non-local strain approach is computationally quite costly, especially if one is to compute the contribution to the non-local strain from all integration points. Therefore, in the current implementation the non-local strain is computed by the integration points inside a radius of  $3 \cdot l$  for each integration point. The non-local strain contribution (i.e. the integral) is calculated numerically by summing over all integration points together with the element dependent volume of each integration point. The material model needs therefore this volume as an input parameter in addition to the standard input data. Furthermore, the strain increments of all integration points must be available in the material model. These strains must therefore either be written to a file or saved in a common array.

## 4 SIMULATIONS

### 4.1 Shear test

To study the performance of the different weighting functions in more detail a 1D shear column is considered. These analyses are performed by the in-house FE program BIFURC. A 100 mm high column is modeled by 50 2-noded shear elements with the same length of 2 mm. The 2-noded element has two displacement degrees of freedom in each node (axial and lateral displacements). The bottom of the column is totally fixed. The column is deformed by applying a horizontal shear stress at the top. The material parameters used in this example are presented in Table 1. The elastic shear modulus  $G_{ur}$ , the peak undrained DSS shear strength  $s_u^{DSS}$  and the residual undrained DSS shear strength  $s_u^{DSS_r}$  are normalized by the undrained peak active shear strength  $s_u^A$ . The blue curve in Fig. 1 shows the normalized shear stress versus the horizontal displacement at the top of the column under uniform deformation (i.e. the shear stress–shear strain curve of the material). Analyses were then performed by reducing the peak shear strength in the middle element (25 to 27 mm above the bottom) by 0.1%. The main purpose here is to study the performance of both the over non-local strain approach and the weighting function proposed by Galavi & Schweiger (2010) (in the following called G&S for simplicity).

Table 1 Soil parameters for the NGI-ADPsoft model used in the 1D shear column

$G_{ur}/s_u^A$	$s_u^{DSS}/s_u^A$	$s_u^{DSS_r}/s_u^A$	$\gamma_f^{DSS}$	$\gamma_r^{DSS}$
500	0.67	0.5	5%	20%

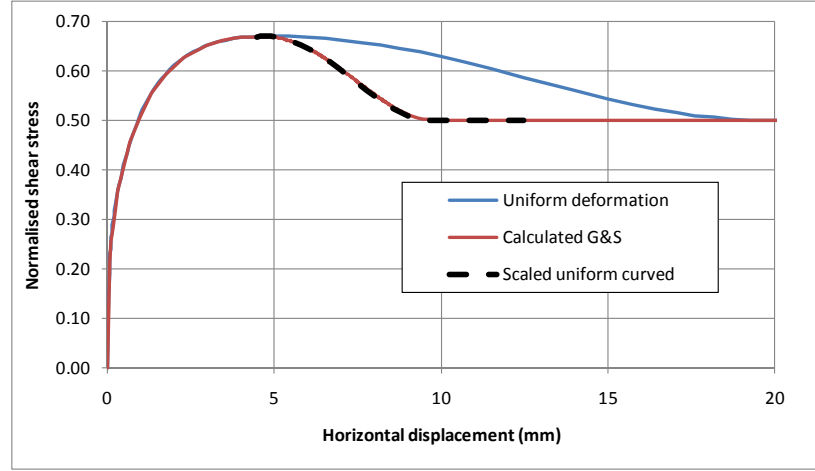


Fig. 1. Normalized shear stress versus horizontal displacement at the top of the column for uniform deformation and for a condition where the post peak plastic deformation is localized in an effective shear band of 34 mm or 34% of the total height

The red curve in Fig. 1 shows the result obtained using the G&S weighting function together with an internal length  $l$  of 10 mm. The effective shear band thickness  $t_{sb}$  is found to be 34 mm, i.e. 3.4 times the internal length  $l$ . This agrees with the idealized analytical solution presented in Section 3.1. The effective shear band thickness is here found by scaling the shear stress-displacement curve for uniform deformation by the effect of localized plastic deformation until it fits the calculated curve. It is assumed that the shear strain is constant within the effective shear band and following the post peak stress-strain softening curve. The material outside the shear band is elastically unloaded and the deformation is given by the elastic shear modulus. This effective shear band thickness which is what we want to give as input to the analyses of our strain softening sensitive clay, is very difficult to extract from the calculated results. By considering the distribution of the shear strain increment along the shear column in the strain softening regime, see Fig. 2, the shear zone is smaller than 34 mm. It is only slightly larger than two times the internal length. However, by integrating the shear strain increment over this zone, it is found the average shear strain increment over the zone is larger than the shear strain increment given by the material curve. This is the reason why the effective shear band thickness is larger than the calculated shear zone. The shear strain distribution obtained with  $\alpha = 1.58$  and  $l = 3.4/3.14 \cdot 10 \text{ mm} = 10.8 \text{ mm}$  (which gives an effective shear band thickness of 34 mm) is in Fig. 2 compared with the distribution obtained with G&S and  $l = 10 \text{ mm}$ . It is seen that the strain distribution is very smooth with the over non-local strain approach while it is significantly more irregular with G&S. These two distributions are obtained with the same equilibrium tolerance factor such it is possible that the G&S distribution becomes more regular for an even tighter tolerance factor. However, this makes the G&S method more inefficient. Even with this irregular distribution the G&S method is found to regularize the problem perfectly and with an effective shear band thickness of  $3.4 \cdot l$ .

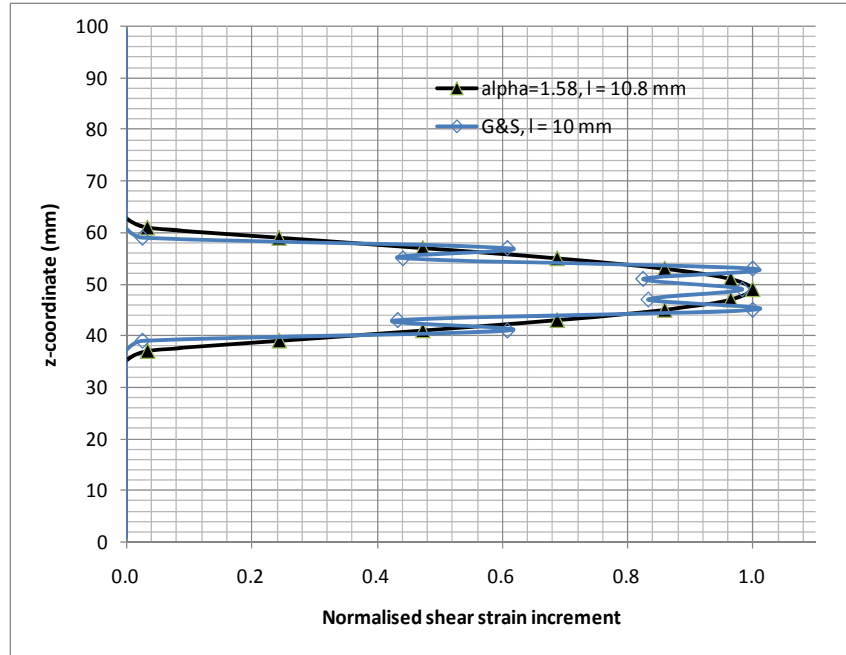


Fig. 2. Distribution of the scaled shear strain increment in the post peak softening regime obtained with the over non-local strain approach with  $\alpha = 1.58$  and  $l = 10.8$  mm (black curve), and with the weighting function proposed by Galavi & Schweiger (2010) and  $l = 10$  mm (blue curve)

The calculation time (here expressed by the accumulated number of iterations) and ratio between calculated effective shear band thickness (found by scaling the stress-strain curve) and the analytical shear band thickness (given in Section 3.1) are compared for different  $\alpha$ -values in the over non-local strain approach together with the weighting function of G&S. The results are presented in Table 2.

Table 2. The effect of using different weighting functions

$\alpha$	1.01	1.1	1.2	1.58	2.0	G&S
$l$ (mm)	23.25	16.76	14.49	10.8	9.01	10.0
Calculated $t_{sb}$ over analytical $t_{sb}$	129%	112%	106%	103%	100%	100%
No. of increments	475	647	427	361	286	739
Accumulated no. of iterations	21523	30212	18207	17142	12774	23717

Based on this study it seems that the recommendation by Brinkgreve and Vermeer (1994) of using  $\alpha = 2.0$  gives the most optimum solution with respect to calculation time and accuracy in calculating the effective shear band thickness. However, this result is based on a very simple problem such more complex boundary value problems need to be studied. Furthermore, the results obtained with low  $\alpha$ -values may have been affected by the boundary conditions.

#### 4.2 Biaxial compression test

To continue the study of the non-local strain approach and the effect of using different weighting functions a plane strain (biaxial) compression test is considered. The top and bottom boundaries are assumed to be perfectly rough in order to trigger localization without any introduction of an arbitrary perturbation. Table 3 gives the NGI-ADPSOFT model parameters. This biaxial compression test simulation is also used to study the effect of

accounting for symmetry lines together with the non-local strain approach. Based on the mathematical formulation this is expected to affect the results. In all simulations 15 node triangular elements are used in Plaxis. Nine cases are presented in the following. Simulations with the G&S weighting function (called modified non-local in the figures), the original weighting function in the non-local strain approach ( $\alpha = 1$ ) and with the original weighting function in the over non-local approach ( $\alpha = 1.58$ ) are considered. Each of these sets is used together with: a “medium” mesh, a “fine” mesh and a “fine” mesh with symmetry lines. The specified internal length parameter  $l$  is 5 mm in all cases. This automatically gives somewhat different effective shear band thicknesses and is therefore one reason for the different post-peak softening responses. The analyses should therefore in the future also be repeated with varying  $l$  that theoretically gives the same effective shear band thickness. The height of the sample is 100 mm and the width is 50 mm. The initial stress condition is generated such that the initial shear stress is equal the input parameter  $\tau_0$ . To obtain results that are expected to be sufficient objective, the error criteria of the norm of the unbalanced nodal force vector divided by the norm of the external nodal load vector is set to 0.01%. Such a low error criteria is found to be necessary for boundary value problems with small gradients of stresses in order to ensure localization close enough to the first critical bifurcation point. For boundary value problems that involve larger gradients in stresses a larger error criteria may be used.

Table 3 Soil parameters for the NGI-ADPsoft model

$G_{ur}/s_u^A$	$s_u^{DSS}/s_u^A$	$s_u^P/s_u^A$	$s_{u,r}^A/s_u^A$	$s_{u,r}^{DSS}/s_u^A$	$s_{u,r}^P/s_u^A$	$\epsilon_{lf}^C$	$\gamma_f^{DSS}$	$\epsilon_{lf}^E$	$\epsilon_{1rf}^C$	$\gamma_r^{DSS}$	$\epsilon_{1rf}^E$	$\tau_0/s_u^A$
500	0.7	0.4	0.1	0.1	0.1	1%	2%	3%	13.3%	20%	13.3%	0.7

Due to the difference in the obtained effective thickness of the shear band with the different approaches the results are presented individually in plots of normalized vertical displacement ( $\delta_v/H$ ) versus normalized excess stress (vertical stress in excess of the initial effective stress). The peak increase in vertical stress divided by the peak undrained active shear strength  $s_u^A$  under homogeneous deformations is then  $2 \cdot (1.0 - 0.7) = 0.6$ . For the simulations with different number of elements both the G&S weighting function and the over non-local approach gives mesh independent results. However, the cases where symmetry is utilized give results which are model dependent. It must be noted that the differences for this particular problem is very small. Fig. 3 shows the small difference that is obtained in the normalized load–displacement curves with the different formulations and the effect of including symmetry lines.

From the normalized load displacement curves it is seen that calculated effective shear band thickness obtained by the G&S weighting function is slightly smaller than obtained with  $\alpha = 1.58$ , i.e. the post peak softening curve is slightly steeper. This does not agree with the analytical solutions for 1D condition, where the effective thickness with G&S weighting function should be  $3.4/3.14 = 1.08$  larger. An explanation for this should be found.

From the contour plots of total shear strains in Fig. 4 it is seen that the shear band orientation (where the inclination is less than 45 degrees from horizontal) is affected by the shear band thickness. This seems to be due to the assumption of rough boundaries at the top and bottom of the sample combined with the kinematics of a thin shear band. However, how the non-local strain approach affects the orientation of a propagating shear band will be studied in the future.

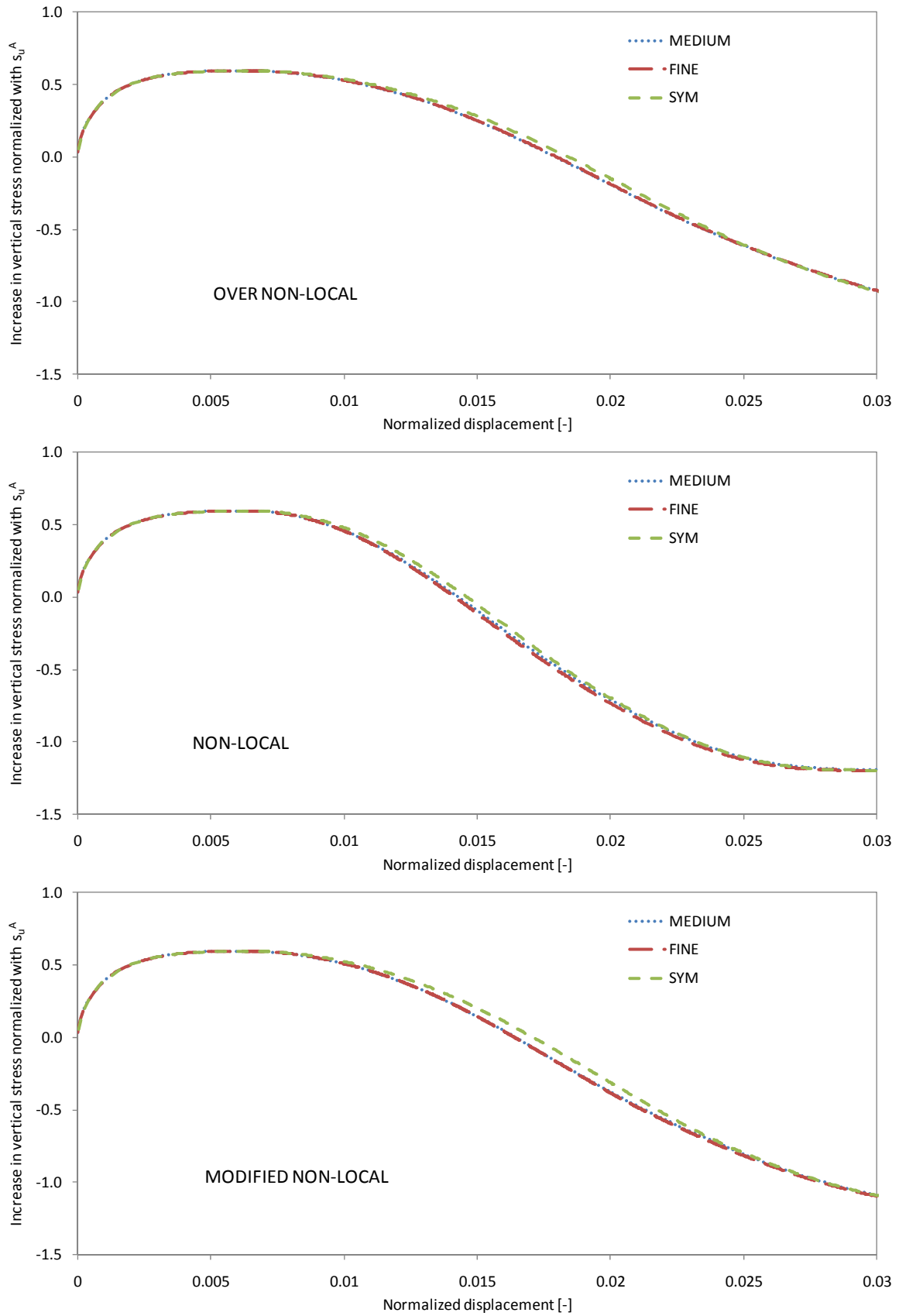


Fig. 3. Normalized load displacement curves. Over non-local with  $\alpha = 1.58$ , non-local ( $\alpha = 1.0$ ) and Galavi & Schweiger's modified weighting function. Internal length  $l = 5$  mm.



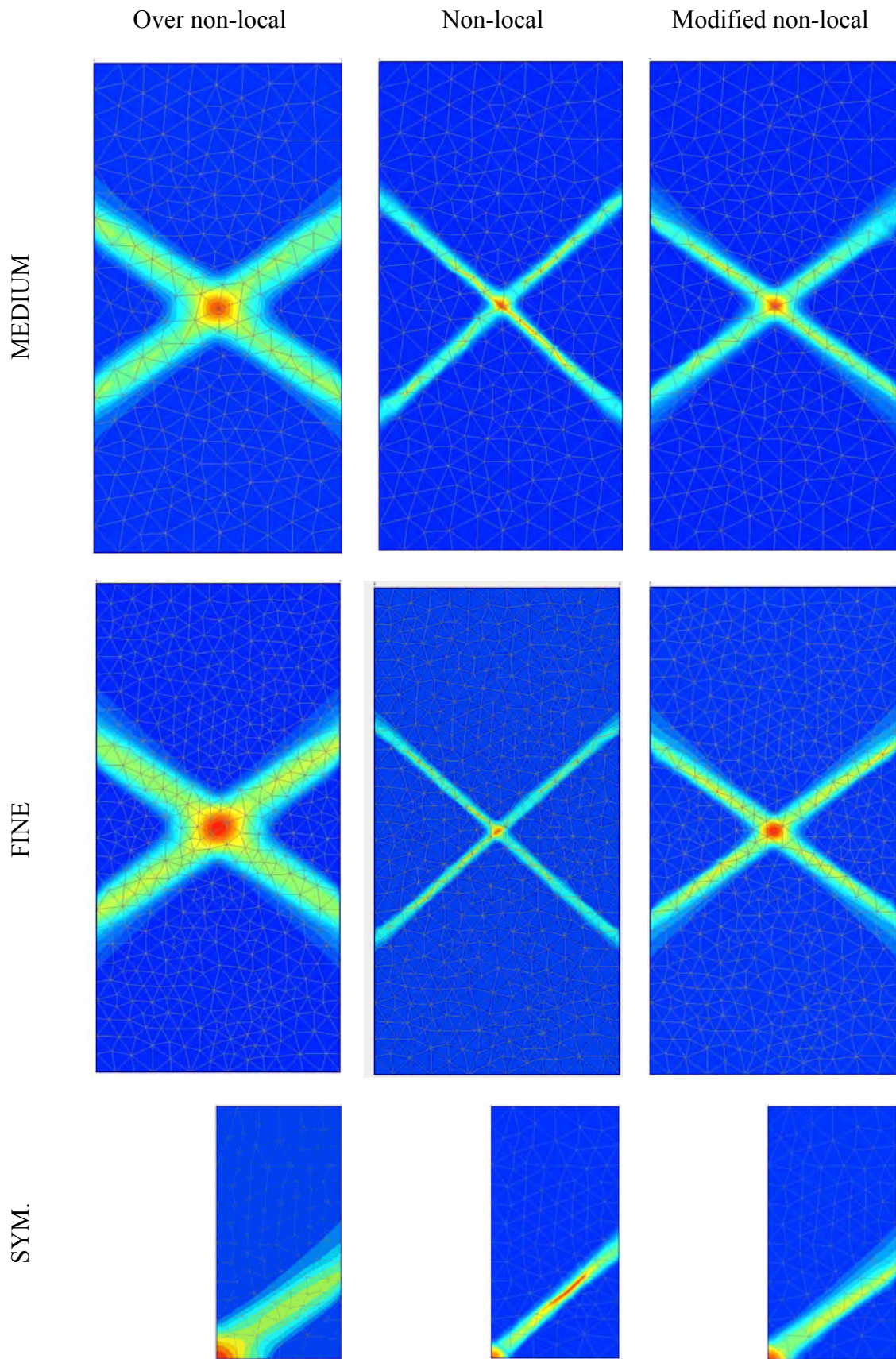


Fig. 4. Contour plots of total shear strain at the end of the analyses

## 5 CONCLUSIONS

This paper considers the effect of using different weighting formulations in the non-local strain approach incorporated in the strain softening elasto plastic model NGIADPSoft (Grimstad et al. 2010) for undrained behavior of sensitive soft clays. Based on this study the recommendation by Brinkgreve and Vermeer (1994) of using the over non-local strain approach with  $\alpha = 2.0$  seems to be valid. However, this needs somewhat finer discretisation than using  $\alpha = 1.58$  when the same effective shear band thickness should be modeled, i.e. the internal length  $l$  needs to be reduced by about 17% when  $\alpha$  is increased from 1.58 to 2.0. The over non-local strain approach is found to be more attractive than using the weighting function proposed by Galavi & Schweiger (2010) since the G&S method gives more irregular strain distribution within the shear zone. It should also be emphasized that the effective shear band thickness assuming constant shear strain within the shear band, is larger than the calculated shear zone. This effect is important to account for when comparing different weighting functions.

The non-local strain approach as a regularization technique is attractive due to its simplicity. It may by some approximations only involve implementation at the material point level. Furthermore, it makes it possible to model shear band propagation without any criteria for when and where to develop and no need to define the orientation. The shear band formation and propagation are automatically given by the material model together with the specified effective shear band thickness as long as the element mesh is fine enough. Thin shear bands must be modeled by refining the mesh in zones where shear band develops. That the shear band thickness for this type of problem is unknown is another problem and not solved by any standard regularization techniques. Further research is therefore needed to define the actual shear band thickness to be used in this type of analyses.

## ACKNOWLEDGEMENT

Part of this work has been carried out in a Joint Industry Project, financed by the Norwegian Road Authorities (SSV), The Norwegian Water Resources and Energy Directorate NVE, and The Norwegian Geotechnical Institute (NGI). The research was also partly carried out as a part of “GEO-INSTALL” (Modelling Installation Effects in Geotechnical Engineering), supported by the European Community through the program “ Marie Curie Industry-Academia Partnership and Pathways” (Contract No PIAP-GA-2009-230638).

## REFERENCES

- Andresen, L. & Jostad, H.P. (1998), “Effect of strain-softening in interpretation of laboratory compression tests”, Proceedings of 4th European Conference on Numerical Methods in Engineering - NUMGE 1998. Udine, Italia, 223-232.
- Andresen, L. & Jostad, H.P. (2002), “A constitutive model for anisotropic and strain-softening clay”, Proceedings of Numerical Models in Geomechanics - NUMOG VIII. Rome, Italy, 79-84.
- Brinkgreve, R.B.J (1994), Geomaterial Models and Numerical Analysis of Softening, PhD thesis, TU Delft, Delft, The Netherlands.
- de Borst, R. & Heeres, O. M. (2002), “A unified approach to the implicit integration of standard, non-standard and viscous plasticity models”, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. 26, 1059–1070.
- Darve, F., (2010), “Bifurcation in geomaterials: experiments and modelling”, Proceedings of 9th HSTAM International Congress on Mechanics, Vardoulakis mini-symposia, Limassol, Cyprus

- Eringen, A.C. (1981), "On non-local plasticity", *Int. J. Eng. Science*, 19, 1461-1474.
- Galavi, V. & Schweiger, H.F. (2010), "Nonlocal Multilaminate Model for Strain Softening Analysis" *International Journal of Geomechanics*, 10, 30-44.
- Grimstad, G., Jostad, H.P. and Andresen, L., (2010), "Undrained capacity analyses of sensitive clays using the non-local strain approach", *Proceedings of 9th HSTAM International Congress on Mechanics, Vardoulakis mini-symposia, Limassol, Cyprus*
- Grimstad, G., Andresen, L. and Jostad, H.P. (2011), "NGI ADP: Anisotropic Shear Strength Model for Clay", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, DOI: 10.1002/nag
- Vermeer, P. A. & Brinkgreve, R. B. J. (1994), "A new effective non-local strain-measure for softening plasticity", *Proceedings of 3rd Intern. Workshop on Localisation and Bifurcation Theory for Soils and Rocks, Grenoble, September 1993*, 89-100.

# Kontroll- og referanseside/ Review and reference page



Dokumentinformasjon/Document information						
Dokumenttittel/Document title A1 Numerisk metode for beregning av udrenert brudd i sensitive materialer				Dokument nr/Document No. 20092128-00-4-R		
Dokumenttype/Type of document		Distribusjon/Distribution		Dato/Date		
<input checked="" type="checkbox"/> Rapport/Report		<input checked="" type="checkbox"/> Fri/Unlimited		2014-05-12		
<input type="checkbox"/> Teknisk notat/Technical Note		<input type="checkbox"/> Begrenset/Limited		Rev.nr./Rev.No.		
		<input type="checkbox"/> Ingen/None		0		
Oppdragsgiver/Client						
Emneord/Keywords Strain Softening, sensitiv leire, kvikkleire, FEM, progressivt brudd, regularisering						
Stedfesting/Geographical information						
Land, fylke/Country, County				Havområde/Offshore area		
Kommune/Municipality				Felt navn/Field name		
Sted/Location				Sted/Location		
Kartblad/Map				Felt, blokknr./Field, Block No.		
UTM-koordinater/UTM-coordinates						
Dokumentkontroll/Document control						
Kvalitetssikring i henhold til/Quality assurance according to NS-EN ISO9001						
Rev./Rev.	Revisjonsgrunnlag/Reason for revision	Egenkontroll/ Self review av/by:	Sidemanns- kontroll/ Colleague review av/by:	Uavhengig kontroll/ Independent review av/by:	Tverrfaglig kontroll/ Inter- disciplinary review av/by:	
0	Originaldokument	Fot GG - PFO	HPJ	HPJ		
Dokument godkjent for utsendelse/ Document approved for release		Dato/Date 12.05.2014		Sign. Prosjektleder/Project Manager Hans Petter Jostad		

NGI (Norges Geotekniske Institutt) er et internasjonalt ledende senter for forskning og rådgivning innen geofagene. Vi utvikler optimale løsninger for samfunnet, og tilbyr ekspertise om jord, berg og snø og deres påvirkning på miljøet, konstruksjoner og anlegg.

Vi arbeider i følgende markeder: olje, gass og energi, bygg, anlegg og samferdsel, naturskade og miljøteknologi. NGI er en privat stiftelse med kontor og laboratorier i Oslo, avdelingskontor i Trondheim og datterselskap i Houston, Texas, USA.

NGI ble utnevnt til "Senter for fremragende forskning" (SFF) i 2002 og leder "International Centre for Geohazards" (ICG).

[www.ngi.no](http://www.ngi.no)

NGI (Norwegian Geotechnical Institute) is a leading international centre for research and consulting in the geosciences. NGI develops optimum solutions for society, and offers expertise on the behaviour of soil, rock and snow and their interaction with the natural and built environment.

NGI works within the oil, gas and energy, building and construction, transportation, natural hazards and environment sectors. NGI is a private foundation with office and laboratory in Oslo, branch office in Trondheim and daughter company in Houston, Texas, USA.

NGI was awarded Centre of Excellence status in 2002 and leads the International Centre for Geohazards (ICG).

[www.ngi.no](http://www.ngi.no)



Hovedkontor/Main office:  
PO Box 3930 Ullevål Stadion  
NO-0806 Oslo  
Norway

Besøksadresse/Street address:  
Sognsveien 72, NO-0855 Oslo

Avd Trondheim/Trondheim office:  
PO Box 1230 Pirsenteret  
NO-7462 Trondheim  
Norway

Besøksadresse/Street address:  
Pirsenteret, Havnegata 9, NO-7010 Trondheim

T: (+47) 22 02 30 00  
F: (+47) 22 23 04 48

[ngi@ngi.no](mailto:ngi@ngi.no)  
[www.ngi.no](http://www.ngi.no)

Kontonr 5096 05 01281 /IBAN NO26 5096 0501 281  
Org. nr/Company No.: 958 254 318 MVA

BSI EN ISO 9001  
Sertifisert av/Certified by BSI, Reg. No. FS 32989

## Utgitt i Rapportserien i 2014

- Nr. 1 Analyse av energibruk i forretningsbygg. Formålsdeling. Trender og drivere
- Nr. 2 Det høyspente distribusjonsnett. Innsamling av geografiske og tekniske komponentdata
- Nr. 3 Naturfareprosjektet Dp. 5 Flom og vann på avveie. Dimensjonerende korttidsnedbør for Telemark, Sørlandet og Vestlandet: Eirik Førland, Jostein Mamen, Karianne Ødemark, Hanne Heiberg, Steinar Myrabø
- Nr. 4 Naturfareprosjektet: Delprosjekt 7. Skred og flomsikring. Sikringstiltak mot skred og flom Befaring i Troms og Finnmark høst 2013
- Nr. 5 Kontrollstasjon: NVEs gjennomgang av elsertifikatordningen
- Nr. 6 New version (v.1.1.1) of the seNorge snow model and snow maps for Norway. Tuomo Saloranta
- Nr. 7 EBO Evaluering av modeller for klimajustering av energibruk
- Nr. 8 Erfaringer fra ekstremværet Hilde, november 2013
- Nr. 9 Erfaringer fra ekstremværet Ivar, desember 2013
- Nr. 10 Kvartalsrapport for kraftmarknaden. 4. kvartal 2013. Ellen Skaansar (red.)
- Nr. 11 Energibruksrapporten 2013
- Nr. 12 Fjernvarmens rolle i energisystemet
- Nr. 13 Naturfareprosjektet Dp. 5 Flom og vann på avveie. Karakterisering av flomregimer. Delprosjekt. 5.1.5
- Nr. 14 Naturfareprosjektet Dp. 6 Kvikkleire. En omforent anbefaling for bruk av anisotropifaktorer i prosjektering i norske leirer
- Nr. 15 Tilleggsrapport: Oppsummering av Energimyndighetens og NVEs gjennomgang av elsertifikatordningen
- Nr. 16 Flomberegning for Nesttunvassdraget (056.3Z). Thomas Væringstad
- Nr. 17 Årsrapport for tilsyn
- Nr. 18 Verktøyprosjektet - hydrologi 2010-2013. En oppsummering av aktiviteter og resultater. Erik Holmqvist (red.)
- Nr. 19 Flom og jordskred i Nordland og Trøndelag desember 2013. Elin Langsholt, Erik Holmqvist, Delia Welle Kejo
- Nr. 20 Vindkraft i produksjon i 2013
- Nr. 21 FoU-prosjekt 81072 Pilotstudie: Snøskredfarekartlegging med ATES (Avalanche Terrain Exposure Scale) Klassifisering av snøskredterreng for trygg ferdsel
- Nr. 22 Naturfareprosjektet: Delprosjekt 3.1. Hvordan beregne ekstremverdier for gitte gjentaksintervaller? Manual for å beregne returverdier av nedbør for ulike gjentaksintervaller (for ikke-statistikker)
- Nr. 23 Flomsonekart Delprosjekt Tuv. Kjartan Orvedal, Julio Pereira
- Nr. 24 Summary of the review of the electricity certificates system by the Swedish Energy Agency and the Norwegian Water Resources and Energy Directorate (NVE)
- Nr. 25 Landsomfattende mark- og grunnvannsnett. Drift og formidling 2011. Jonatan Haga Per Alve Glad
- Nr. 26 Naturfareprosjektet: Delprosjekt 1 Naturskadestrategi. Sammenligning av risikoakseptkriterier for skred og flom. Utredning for Naturfareprogrammet (NIFS)
- Nr. 27 Naturfareprosjektet Dp. 6 Kvikkleire. Skredfarekartlegging i strandsonen
- Nr. 28 Naturfareprosjektet Dp. 5 Flom og vann på avveie. "Kvistdammer" i Slovakia. Små terskler laget av stedegent materiale, erfaringer fra studietur for mulig bruk i Norge
- Nr. 29 Reestablishing vegetation on interventions along rivers. A compilation of methods and experiences from the Tana River valley
- Nr. 30 Naturfareprosjektet Dp. 5 Flom og vann på avveie. Karakterisering av flomregimer
- Nr. 31 Småkraftverk: Tetthet og reproduksjon av ørret på utbygde strekninger med krav om minstevannføring Svein Jakob Saltveit og Henning Pavels
- Nr. 32 Kanalforvaltningen rundt 1814 – del av en fungerende statsadministrasjon for det norske selvstendighetsprosjektet. Grunnlovsjubileet 2014
- Nr. 33 Museumsordningen 10 år

- Nr. 34 Naturfareprosjektet Dp. 6 Kvikkleire. Skredfarekartlegging i strandsonen -videreføring
- Nr. 35 Naturfareprosjektet Dp. 5 Flom og vann på avveie. Karakterisering av flomregimer  
Delprosjekt. 5.1.5. Revisjon av rapport 13-2014
- Nr. 36 Kvartalsrapport for kraftmarknaden 1. kvartal 2014. Gudmund Bartnes (red.)
- Nr. 37 Preliminary regionalization and susceptibility analysis for landslide early warning purposes in Norway
- Nr. 38 Driften av kraftsystemet 2013
- Nr. 39 Naturfareprosjektet Dp. 6 Kvikkleire. Effekt av progressivbruddutvikling for utbygging i områder med kvikkleire: Sensitivitetsanalyse basert på data fra grunnundersøkelser på vegstrekningen Sund-Bradden i Rissa
- Nr. 40 Naturfareprosjektet DP. 6 Kvikkleire. Effekt av progressiv bruddutvikling for utbygging i områder med kvikkleire: Sensitivitetsanalyse-1
- Nr. 41 Bioenergi i Norge
- Nr. 42 Naturfareprosjektet Dp. 5 Flom og vann på avveie. Dimensjonerende korttidsnedbør for Møre og Romsdal, Trøndelag og Nord-Norge. Delprosjekt. 5.1.3
- Nr. 43 Terskelstudier for utløsning av jordskred i Norge. Oppsummering av hydrometeorologiske terskelstudier ved NVE i perioden 2009 til 2013. Søren Boje, Hervé Colleuille og Graziella Devoli
- Nr. 44 Regional varslingsanalyse av jordskredfare: Analyse av historiske jordskred, flomskred og sørpeskred i Gudbrandsdalen og Ottadalen. Nils Arne K. Walberg, Graziella Devoli
- Nr. 45 Flomsonekart. Delprosjekt Hemsedal, Martin Jespersen, Rengifo Ortega
- Nr. 46 Naturfareprosjektet Dp. 6 Kvikkleire. Mulighetsstudie om utvikling av en nasjonal blokkprøvedatabase
- Nr. 47 Naturfareprosjektet Dp. 6 Kvikkleire. Detektering av sprøbruddmateriale ved hjelp av R-CPTU
- Nr. 48 En norsk-svensk elsertifikatmarknad. Årsrapport 2013
- Nr. 49 Øvelse Østlandet 2013. Evalueringsrapport
- Nr. 50 Et norsk-svensk elsertifikatmarked. Årsrapport 2013
- Nr. 51 Forslag til nytt vekstsystem i modellen for å fastsette kostnadsnormer i regionalnettene
- Nr. 52 Jord- og sørpeskred i Sør-Norge mai 2013. Monica Sund
- Nr. 53 Årsrapport for utførte sikrings- og miljøtiltak for 2013
- Nr. 54 Naturfareprosjekt DP. 1 Naturskadestrategi Samarbeid og koordinering vedrørende naturfare.  
En ministudie av Fellesprosjektet E6-Dovrebanen og Follobanen
- Nr. 55 Naturfareprosjektet DP.6 Kvikkleire. Effekt av progressiv bruddutvikling for utbygging i områder med kvikkleire: Numerisk metode for beregning av udrenert brudd i sensitive materialer





Norges  
vassdrags- og  
energidirektorat

Norges vassdrags- og energidirektorat

Middelthunsgate 29  
Postboks 5091 Majorstuen  
0301 Oslo

Telefon: 09575  
Internett: [www.nve.no](http://www.nve.no)

